

Departamento de Matemática

**Mestrado em Matemática Aplicada em
Actuariado, Estatística e Investigação Operacional**

**Avaliação de responsabilidades de Fundos de Pensões com tábua de mortalidade
dinâmica**

Sara Costa

Orientadores: Professora Doutora Maria de Lourdes Belchior Afonso
Professor Doutor Pedro Alexandre da Rosa Corte Real

Dissertação apresentada na Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova
de Lisboa para obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações - Actuariado,
Estatística e Investigação Operacional

Lisboa, Setembro de 2009

Agradecimentos

Agradeço desde já a todos os que tiveram a paciência de ler este trabalho, que nunca teria sido possível sem a orientação da Prof.^a Dr.^a Maria de Lourdes Belchior Afonso e do Prof. Dr. Pedro Alexandre da Rosa Corte Real da Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia. Agradeço o incentivo e o apoio concedido durante todo este tempo dado pela Prof.^a Dr.^a Lourdes Afonso, sem a sua ajuda este projecto não teria chegado a bom porto.

Ao meu marido, Sérgio Lopes, a paciência, incentivo e a força que me deu, aos meus pais, Américo Costa e M^a de Fátima Costa pelo apoio e coragem. Proporcionaram todas as condições para que fosse possível concretizar este projecto.

Foram eles, juntamente com a Prof.^a Dr.^a Lourdes Afonso que mais sofreram com a minha dedicação a esta causa. Dedico-lhes este trabalho e agradeço do fundo do coração toda a paciência e força. Espero poder compensá-los de algum modo por tudo o que fizeram por mim.

Resumo

Com o avanço dos anos, as áreas da economia, política, mercado de trabalho e sistemas financeiros têm sofrido grandes alterações. Neste sentido, a demografia tem acompanhado estas alterações, bem como a esperança média de vida.

O envelhecer da população tem vindo a aumentar cada vez mais, enquanto que a taxa de natalidade é cada vez menor o que influencia directamente a sustentabilidade da Segurança Social.

Neste enquadramento, a actualização da protecção social é algo a ter-se mais em consideração e a evolução demográfica veio reforçar a necessidade de mudança dos sistemas actuais, com o intuito de haver maior capacidade de resposta e flexibilidade no sentido de garantir protecção e apoio face aos riscos que surjam.

Os pressupostos tradicionalmente usados nas avaliações de probabilidades de sobrevivência a longo termo, tal como Plano de Pensões, são tabelas de mortalidade e invalidez estáticas. Neste sentido, no presente trabalho irá projectar-se a esperança média de vida para um dado período, tendo em consideração o decréscimo de morte e invalidez, com a adaptação do modelo discreto para contínuo, proporcionando maior adaptabilidade à população e rapidez computacional. Projectar o aumento da esperança média de vida é importante porque torna o modelo mais realista, tendo em consideração a evolução da população.

A utilização deste novo modelo com o aumento de esperança média de vida em vez do tradicional modelo discreto, tem como resultado responsabilidades mais elevadas. Este facto era previsível na medida em que existe uma maior esperança média de vida, a probabilidade de sobrevivência é maior, tendo por isso impacto no cálculo de responsabilidades da população.

Abstract

As time goes by, the areas of economy, politics, labor market and financial systems have undergone major changes. In this sense, the population has followed these changes and the average life expectancy increased.

The aging of population is growing more and more, while the birth rate is the lowest ever, that directly influences the good performance of Social Security.

In this context, the updating of the social protection is something to be taken more into account and the demographic changes reinforce the need of change the existing systems in order to have greater response capability and flexibility, to ensure protection and support against the risks that may appear.

The assumptions used in traditional assessments of probability of survival in the long term, such as Pension Plan, are static tables of mortality and disability. This project will work on the average life expectancy for a given period, taking into account the decrement of death and disability, with the adaptation of the discrete model to continuous to provide greater adaptability population and computational speed. Projecting an increase in the average life expectancy is important because it makes the model more realistic, in line with the evolution of the population.

Using this new model, with the increase of average life expectancy instead of the traditional discrete model has higher responsibilities as a result. This was predictable, if existing a higher life expectancy, the probability of survival is greater, and therefore impact on the calculation of liabilities of the population.

Índice

1. INTRODUÇÃO	6
2. O PROBLEMA DA MANUTENÇÃO DAS PENSÕES	8
2.1. Sistema de Segurança Social.....	8
2.2. O problema de envelhecimento na Europa e em Portugal.....	9
2.3. Desemprego estrutural e a instabilidade no emprego.....	14
2.4. Protecção Social e Sistemas de Pensões.....	14
3. FUNDOS DE PENSÕES E SISTEMAS DE PENSÕES	16
3.1. Conceitos	16
3.2. Fundos de Pensões e Sistemas de Pensões em Portugal.....	19
4. DESENHO DE UM PLANO DE PENSÕES.....	21
4.1. Avaliação Actuarial de Plano de Pensões.....	21
4.2. Notação.....	24
4.3. Tendências da mortalidade	25
4.3.1. Noções base de mortalidade	25
4.3.2. Modelo de projecção de mortalidade	28
4.3.3. Formulário para avaliação do Plano.....	29
4.3.4. Tipos de cobertura.....	30
5. METODOLOGIA E APLICAÇÃO PRÁTICA.....	32
5.1. O Plano de Pensões.....	32
5.2. Método Actuarial.....	32
5.3. Estatística da população	33
5.4. Tabelas de Decrementos	37
5.5. Estimativa de parâmetros de Lei de Gompertz	40

5.5.1.	Estimativa de parâmetros de Lei de Gompertz para Tabela de Mortalidade TV73/77	40
5.5.2.	Estimativa de parâmetros de Lei de Gompertz para Tabela líquida de Mortalidade e Invalidez.....	42
5.5.3.	Esperança Média de Vida.....	45
5.6.	O Modelo Proposto.....	47
6.	RESULTADOS E APLICAÇÃO PRÁTICA	49
7.	COMENTÁRIOS FINAIS	56
8.	BIBLIOGRAFIA	58
9.	TABELA DE ACRÓNIMOS.....	60
10.	ANEXO.....	61

Índice de Figuras

Figura 1 – Distribuição das responsabilidades da Segurança Social	8
Figura 2 – Índice de fecundidade ((INE, 2008), estatísticas demográficas).....	10
Figura 3 – Pirâmide Etária ((Bureau, 2002-2007), estimativa de população para ano 2008)	11
Figura 4 – Evolução de Pensionistas (Fonte: INE, inquérito ao emprego, Fevereiro de 2008)	11
Figura 5 – Nível de renovação da população (Fonte: Eurostat-Portugal).....	12
Figura 6 – Estrutura das famílias por número de filhos. (Fonte: INE)	12
Figura 7 – População estrangeira (Fonte: INE)	13
Figura 8 – População desempregada (Fonte: INE).....	14
Figura 9 – Repartição do montante total dos Fundos de Pensões (Fonte: Fundos de pensões 2007).....	19
Figura 10 – Mortalidade dos participantes (Fonte: Fundos de pensões 2007)	20
Figura 11 – População em análise.	33
Figura 12 – Percentagem de activos por idade.	34
Figura 13 – Percentagem de inactivos por idade.	34
Figura 14 – Média de serviço passado para participantes activos.	35
Figura 15 – Média de futuro serviço para participantes activos.	35
Figura 16 – Média salarial dos participantes activos.	36
Figura 17 – Pensão média de participantes pensionistas.	36
Figura 18 – Desenvolvimento de taxas unidecremento de morte e de invalidez.....	37
Figura 19 – Desenvolvimento da probabilidade morte e invalidez em ambiente de multidecremento.	39
Figura 20 – Comparação entre l_x líquido com o decremento morte e invalidez, l_x de mortalidade e invalidez.	40
Figura 21 – Gráfico de relação entre l_x exacto e l_x estimado do decremento mortalidade.	41
Figura 22 – Gráfico de relação entre força de mortalidade exacta e estimada.	42
Figura 23 – Gráfico de relação entre l_x exacto e l_x estimado considerando a tábua líquida.	43
Figura 24 – Relação entre a força de mortalidade, μ_x^T , exacta e estimada.	44
Figura 25 – Comparação de esperança de vida calculada através de força de mortalidade, modelo contínuo, e da tabela de mortalidade, modelo discreto.	45
Figura 26 – Comparação de esperança de vida calculada através de μ_x^T e da tabela líquida com os decrementos de mortalidade e de invalidez.....	46
Figura 27 – Comparação de esperança de vida.....	48
Figura 28 – Valor actual dos benefícios totais entre modelo discreto e contínuo.	51
Figura 29 – Valor actual dos benefícios totais entre o modelo discreto e o MCEMV.	52
Figura 30 – Valor actual dos benefícios totais entre o modelo contínuo e o MCEMV....	52
Figura 31 – Média de VABT entre os vários modelos.	53
Figura 32-Comparação da anuidade dos pensionistas do modelo discreto e contínuo.....	53
Figura 33 – Comparação da anuidade dos pensionistas do modelo discreto e MCEMV.	54

Figura 34 – Comparação de anuidade entre modelo contínuo e MCEMV.....	54
Figura 35 – Comparação de variações de anuidades entre os vários modelos.	55

Índice de Tabelas

Tabela 1 – Idade Normal de Reforma na Europa (Fonte: Mercer)	10
Tabela 2 – Esperança de vida à nascença (Fonte: INE).....	13
Tabela 3 – Estatística de participantes activos.....	33
Tabela 4 – Estatística de participantes inactivos.....	33
Tabela 5 – Tabela de mortalidade e invalidez e respectivas taxas unidecremento.	38
Tabela 6 – Tabela de probabilidade morte e invalidez em ambiente de multidecremento.	38
Tabela 7 – Tabela Líquida.	39
Tabela 8 – Tabela de probabilidade da tábua líquida e μ_x^T	43
Tabela 9 – Comparação do Valor Actual dos Benefícios Totais dos Activos com os diferentes modelos.	50
Tabela 10 – Comparação do Custo Normal com os diferentes modelos.	50
Tabela 11 – Comparação do Valor Actual das Pensões em Pagamento com os diferentes modelos.	50

1. Introdução

No decorrer dos últimos anos a economia, a política, o mercado de trabalho, e os sistemas financeiros têm sofrido grandes alterações. Neste sentido a demografia, as estruturas familiares, a taxa de natalidade e mortalidade, e a esperança média de vida têm acompanhado estas alterações. Todos estes factores unidos exercem um impacto nos sistemas de Segurança Social do tipo *pay-as-you-go*, onde os actuais contribuintes do sistema financiam as despesas dos actuais beneficiários. Este tipo de sistema não possui reservas e não existe financiamento antecipado dos benefícios.

Um dos principais factores que influenciam a sustentabilidade da Segurança Social é o envelhecer da população, que tem vindo a aumentar numa população onde a natalidade é cada vez menor. Também se tem observado um aumento da população desempregada, o que implica a diminuição de contribuições para o sistema de Segurança Social.

Neste enquadramento, a actualização da protecção social é algo a ter-se mais em consideração e torna-se cada vez mais importante adaptar as reformas existentes. A questão demográfica, a globalização de economia, as implicações do mercado na vida da população vieram reforçar a necessidade de mudança dos sistemas actuais, de modo a terem mais capacidade de resposta e maior flexibilidade no sentido de garantir protecção e apoio de forma a fazer face aos riscos que surjam.

É neste sentido que os Fundos de Pensões começam a possuir um papel mais importante para soluções financeiras de aforro para a reforma, sendo necessária uma maior adaptação de pressupostos actuariais, demográficos e económicos à população em análise, de modo a permitir a estabilidade do financiamento das pensões e o crescimento económico.

Assim sendo, o presente trabalho tem como objectivo avaliar um plano de pensões de benefício definido (de uma população fictícia), tendo em consideração o aumento de esperança média de vida com o decorrer dos tempos, bem como o adaptar do modelo usualmente discreto, com decremento de morte e invalidez, ao contínuo.

Ao executar esta avaliação através de um modelo contínuo, com projecção de esperança média de vida pretende-se atingir um modelo mais realista, usando o facto da esperança média de vida ter vindo a aumentar com o decorrer dos tempos. Por sua vez, o modelo contínuo é mais facilmente adaptável à população bem como mais rápido computacionalmente.

Este texto é composto de 8 secções, em que a primeira secção consiste numa breve introdução do tema abordado. Na segunda secção analisa-se o problema da manutenção das pensões, na terceira apresentam-se breves conceitos de Fundos e Sistemas de Pensões. Na quarta secção mostra-se o desenho de um plano de pensões. Na secção 5, apresenta-se

a metodologia e aplicação prática da avaliação das responsabilidades do plano. Posteriormente apresentam-se resultados e por fim os comentários finais.

2. O problema da manutenção das Pensões

2.1. Sistema de Segurança Social

O sistema de Segurança Social é o instrumento institucional que possibilita a protecção de qualquer cidadão na sociedade, em situações de pobreza, exclusão social, desemprego, invalidez, reforma, etc. Actualmente, quando se fala em sistema de Segurança Social, inclui-se uma série de mecanismos de protecção pública de riscos sociais, tais como subsídio e prestações compensatórias em caso de doença, maternidade (assim como paternidade e adopção), encargos familiares, como abonos de família e subsídio de funeral, protecção na invalidez, velhice e morte, e protecção no desemprego.

O sistema de Segurança Social é público e contém três realidades distintas. A ordem jurídica, que estabelece os direitos dos cidadãos à protecção pela Segurança Social. As instituições, através das quais os beneficiários e contribuintes estabelecem vínculos jurídicos de direitos, e obrigações que constituem as relações jurídicas da Segurança Social. Os organismos de coordenação normativa e de apoio técnico, ao nível da administração central do Estado que integram o aparelho administrativo da Segurança Social.

A filosofia de protecção social existente assenta num sistema integrado, em que as responsabilidades devem ser partilhadas pelo Estado, pela empresa e pelos próprios indivíduos. É a conhecida teoria dos três pilares.

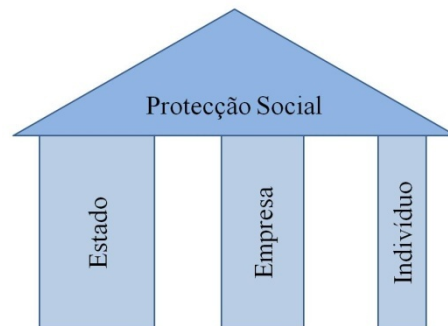


Figura 1 – Distribuição das responsabilidades da Segurança Social

O primeiro pilar é o Estado, este pilar é de participação obrigatória, é gerido pelo Estado em regime de repartição e garante uma base de solidariedade mínima.

O segundo pilar (a empresa), é de participação facultativa e é complementar ao primeiro, é gerido em regime de capitalização e financiado pelas empresas e trabalhadores.

O terceiro pilar (o indivíduo), é de participação facultativa e em regime de capitalização, concede direitos a pensões adicionais com base na poupança privada e voluntária dos indivíduos.

A implementação de um esquema de benefícios implica custos, custos estes que têm que ser financiados. Os principais sistemas de financiamento são: o sistema de repartição

(modelo Europeu) ou *Pay as you go* e o sistema de capitalização (modelo Americano) ou *Pay as you earn*.

No sistema de repartição, que é o que está actualmente em vigor na maioria dos países europeus, são os actuais contribuintes do sistema que financiam as despesas dos actuais beneficiários. O sistema não tem reservas e não existe o financiamento antecipado dos benefícios.

No sistema de capitalização, são as contribuições realizadas, durante o período activo do indivíduo, que vão financiar os benefícios a receber. Desta forma é constituída uma reserva que vai capitalizando ao longo do tempo. Neste sistema cada geração financia os seus próprios benefícios e não os benefícios da geração precedente como acontece no sistema de repartição.

Vamos ver se seguida um dos factores importantes quando se fala de Segurança Social o envelhecimento da população.

2.2.O problema de envelhecimento na Europa e em Portugal

Quando se fala de finanças públicas, um dos problemas que surge é o do envelhecimento da população, que torna o sistema de protecção social insustentável a prazo, pela sobrecarga que colocará às contas do Estado. De modo a responder a estas tendências demográficas, os países europeus têm tomado medidas como o aumento da idade de reforma, o aumento das carreiras contributivas, a redução do valor das pensões, entre outras.

Idade Normal de Reforma		
País	Masculino (M)	Feminino (F)
Europa Ocidental		
Áustria	65	60
Bélgica	65	64
Dinamarca	65	65
Finlândia	65	65
França	65	65
Alemanha	65	65
Grécia	65	60
Irlanda	66	66
Itália	62	62
Luxemburgo	65	65
Malta	61	60
Holanda	65	65
Portugal	65	65
Espanha	65	65
Suécia	65	65
Reino Unido	65	60
Média	64,6	63,6

Idade Normal de Reforma		
País	Masculino (M)	Feminino (F)
Europa Oriental		
República Checa	62	59
Estónia	65	60
Letónia	62	61
Lituânia	61	59
Polónia	65	60
Eslováquia	60	55
Eslovénia	60	54
Média	62,1	58,3

Tabela 1 – Idade Normal de Reforma na Europa (Fonte: Mercer)

Como se pode observar na Tabela 1 a Idade Normal de Reforma (INR) é actualmente, em quase todos os países da Europa Ocidental, aos 65 anos. A idade de reforma varia também, nalguns países, conforme o sexo. No Reino Unido e na Áustria a idade de reforma é de 65 anos para os homens e 60 para as mulheres.

O envelhecimento demográfico continua a ser um grande desafio mesmo após o alargamento da União Europeia. Apesar da população dos novos Estados-Membros ser mais jovem do que a dos Estados-Membros que compunham a União Europeia, isto não contribuiu para diminuir o problema do envelhecimento populacional da Europa. A linha demográfica da Europa não se alterou, o que se deve a uma queda das taxas de fecundidade na maioria dos novos países membros.

Na Figura 2 apresenta-se a evolução do índice de fecundidade em Portugal, que como se pode observar tem vindo a decrescer.

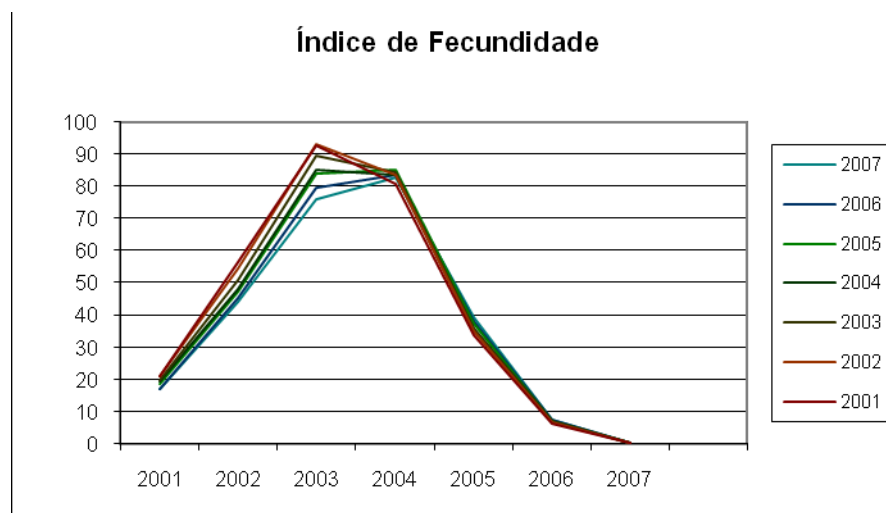


Figura 2 – Índice de fecundidade ((INE, 2008), estatísticas demográficas)

Portugal também sofreu uma grande alteração demográfica nas últimas décadas, passando de um dos países menos envelhecidos da Europa para um dos mais envelhecidos.

Nos presentes anos a pirâmide etária não apresentou sustentação na base e alarga-se em cima.

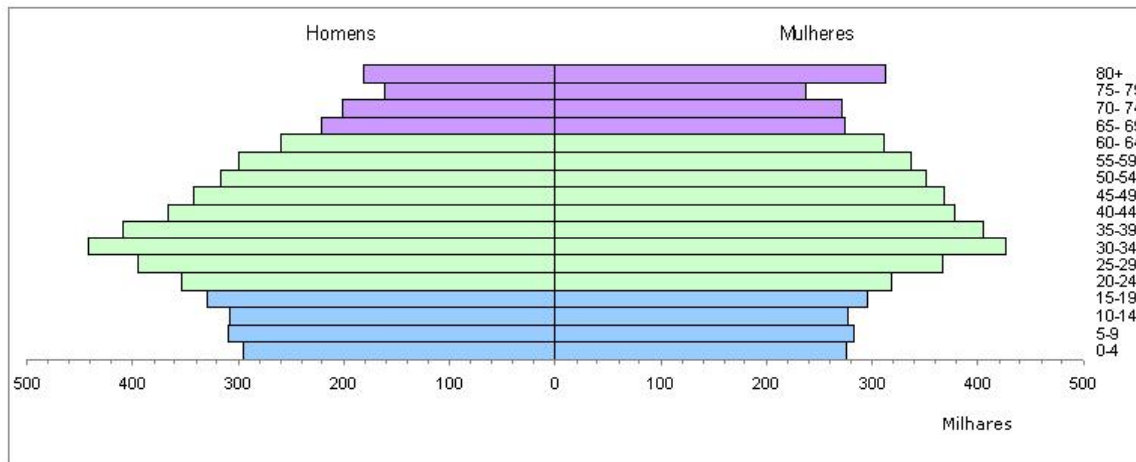


Figura 3 – Pirâmide Etária ((Bureau, 2002-2007), estimativa de população para ano 2008)

Como se pode verificar, os pensionistas têm aumentado no decorrer do período em análise, 2002-2007. Mas este aumento só se verifica em pensionistas com idades superiores a 65 anos. Para os que têm idade inferior a 65 anos, ou seja beneficiários de pré-reforma existe uma diminuição, no mesmo período.

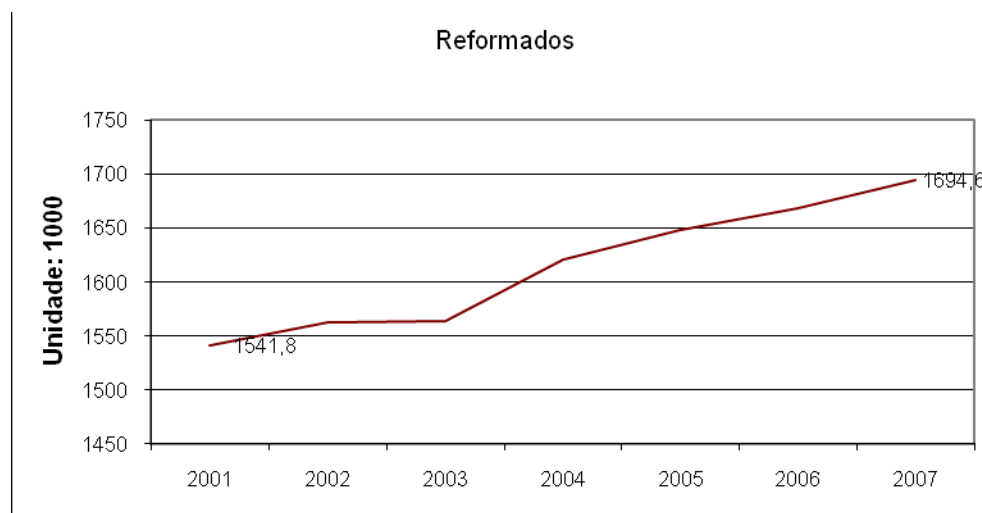


Figura 4 – Evolução de Pensionistas (Fonte: INE, inquérito ao emprego, Fevereiro de 2008)

Durante várias décadas registaram-se baixas nas taxas de fertilidade na Europa, uma tendência que se reforçou com o alargamento.

Encontrando-se, contudo, a fertilidade abaixo do nível de renovação da população (Figura 5), surge o problema do desaparecimento dessa população, o que faz com que alguns países adotem medidas pró-natalidade, no sentido de motivar os cidadãos a ter mais filhos.

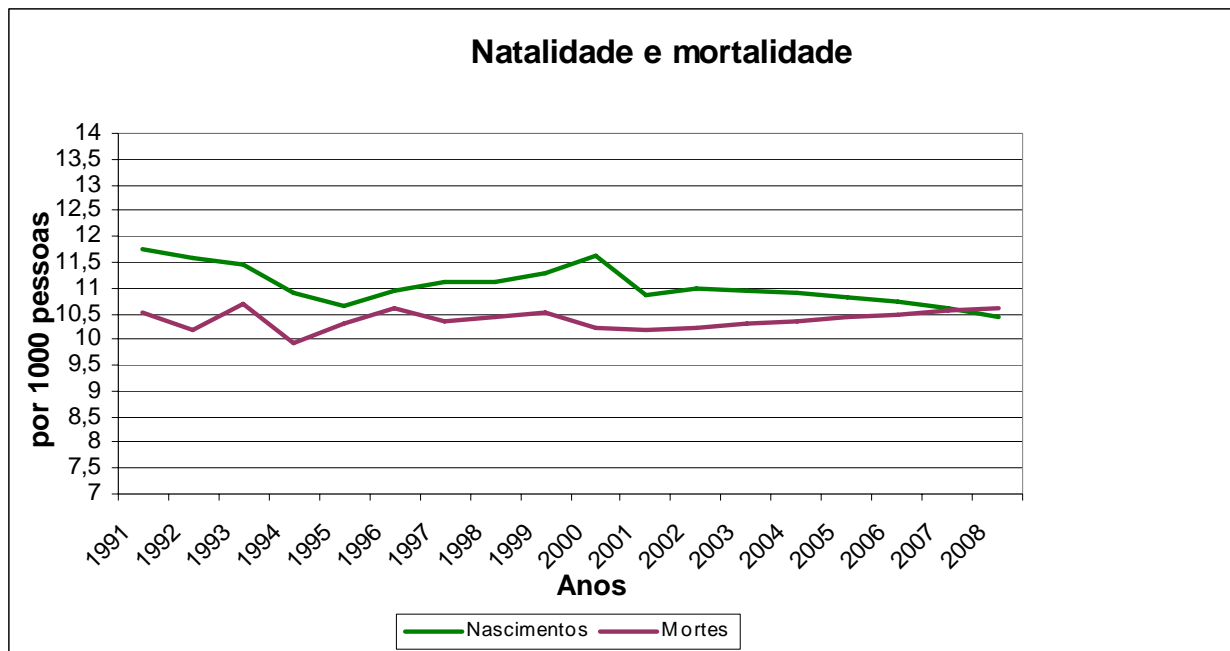


Figura 5 – Nível de renovação da população (Fonte: Eurostat-Portugal)

Relativamente ao momento da maternidade antigamente havia tendência para o casamento e a maternidade precoces, actualmente casa-se mais tarde, e por isso o número de anos fecundos também diminui.

Este adiamento sucessivo de maternidade levou a um aumento de número de tratamentos de infertilidade, e causou preocupações médicas relativamente aos riscos associados a gravidezes tardias.

Na Europa existem pessoas sem filhos contra sua própria vontade e por vezes o facto de adiarem a maternidade, faz com que nunca se venha a concretizar.

Como se pode visualizar na Figura 6, a estrutura de famílias portuguesas com filhos tem vindo a diminuir com o decorrer dos tempos.

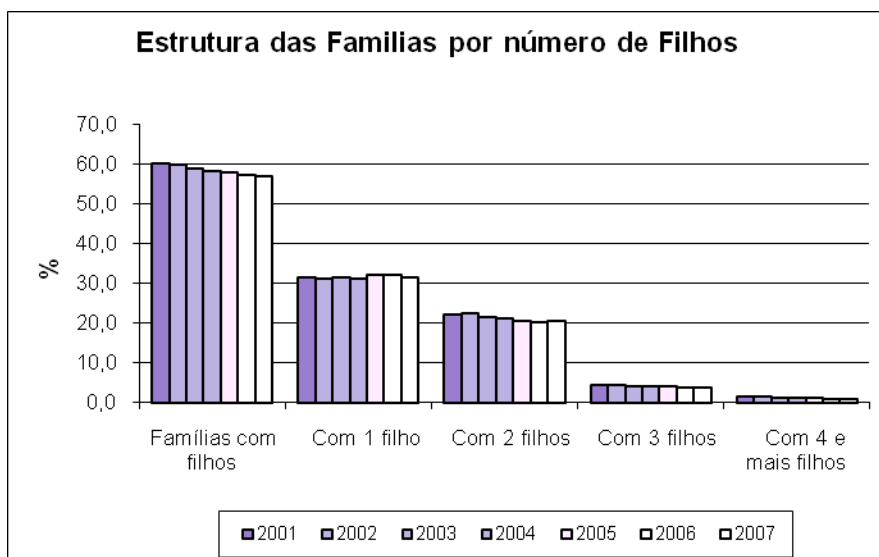


Figura 6 – Estrutura das famílias por número de filhos. (Fonte: INE)

Outro facto que tem contribuído para o envelhecimento da população é o aumento da esperança média de vida que tem sido gradual no decorrer dos últimos anos.

Período	Mulheres	Homens
2005-2007	81.57	75.18
2004-2006 ¹	81.30	74.84
2003-2004	80.98	74.53
2002-2003	80.57	74.00
2001-2002	80.56	73.68

Tabela 2 – Esperança de vida à nascença (Fonte: INE)

O aumento da esperança de vida torna o topo da pirâmide etária mais larga sustentando um volume cada vez maior de inactivos, onde existe um compromisso social do pagamento das suas reformas.

Portugal tem envelhecido no decorrer do tempo por diversos factores, tais como: o aumento de esperança média de vida, devido a novos estilos de vida, melhores condições, os progressos na medicina, melhor assistência médica, a descida da natalidade.

Outro factor de evolução demográfica é a imigração. Esta tem vindo a aumentar consideravelmente em dimensão e importância. Em Portugal o maior número de imigrantes é de nacionalidade brasileira e ucraniana. Na Figura 7 pode-se visualizar a crescente evolução de população estrangeira em Portugal.

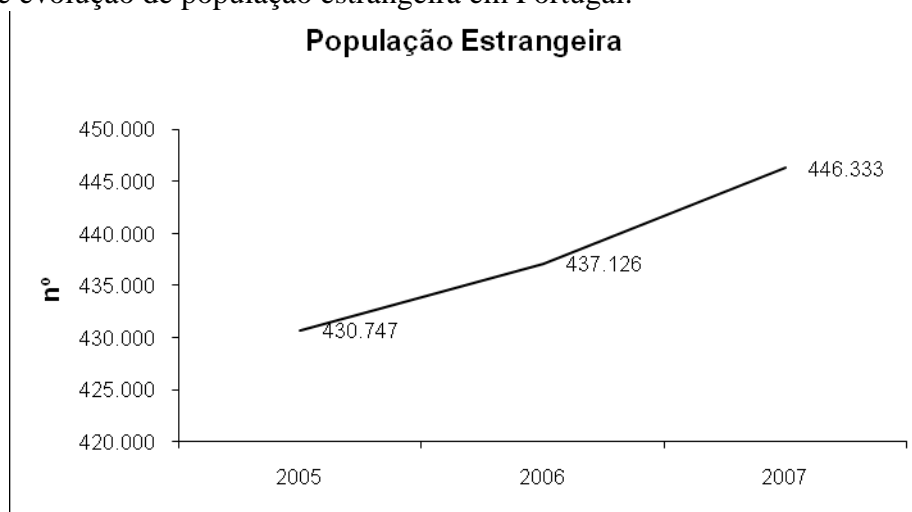


Figura 7 – População estrangeira (Fonte: INE)

¹ É necessário ter presente a seguinte nota na visualização da tabela 2: “em 2007, o INE adoptou uma nova metodologia para o cálculo do indicador Esperança Média de Vida à idade x, baseada em tábuas completas de mortalidade com período de referência de três anos consecutivos.” Actualmente, estão disponíveis as tábuas de mortalidade para homens, mulheres e ambos os sexos, para Portugal, referentes a 2004-2006 e 2005-2007. Face às alterações metodológicas, os valores da esperança média de vida, calculados segundo esta metodologia, não são comparáveis com os valores divulgados até 2007, que são obtidos utilizando tábuas abreviadas de mortalidade com período de referência de dois anos. As Tábuas de mortalidade para Portugal nos períodos 2004-2006 e 2005-2007 são completas.

2.3.Desemprego estrutural e a instabilidade no emprego

A viabilidade do sistema de Segurança Social não está em risco somente devido ao envelhecimento. O mercado de trabalho tem vindo a orientar-se no sentido de flexibilização, manifestando-se especialmente em trabalhadores dependentes, que vivem uma situação de insegurança dos seus postos de trabalho.

O entrar mais tarde no mercado de trabalho, a diminuição de emprego regular e a tempo inteiro, têm como consequência o aumento de situações de trabalho precário. A ausência de relações profissionais entre empregador e empregado faz com que exista uma menor estabilidade do volume de contribuições para o sistema de Segurança Social. Tem-se observado que a população desempregada tem aumentado no decorrer dos tempos (Figura 8).

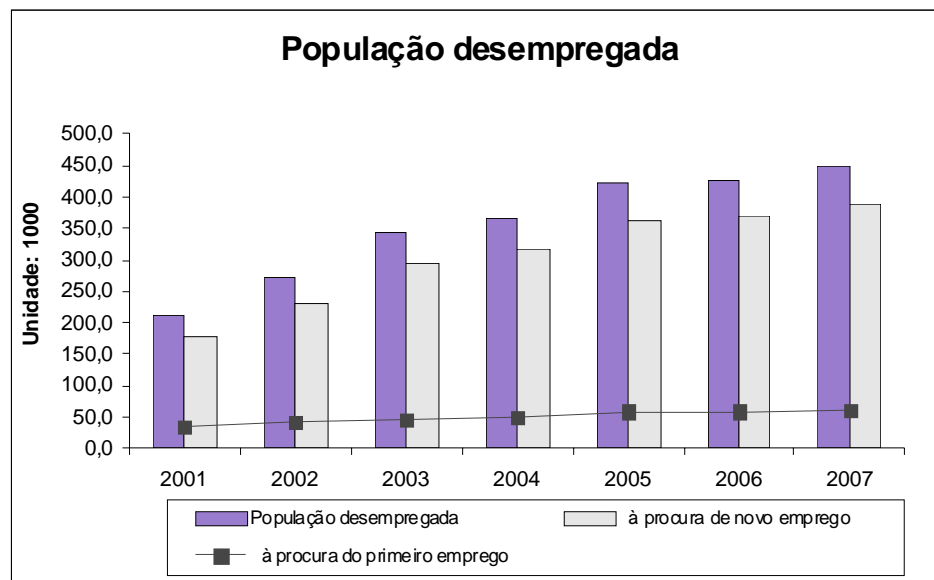


Figura 8 – População desempregada (Fonte: INE)

2.4.Protecção Social e Sistemas de Pensões

Nos últimos tempos tem-se debatido o tema sobre as alterações a aplicar na protecção social devido ao importante papel que os sistemas de protecção social têm na consolidação do desenvolvimento das sociedades e da economia. Devido à generalização da protecção social, começou-se a sentir os efeitos da sua inserção, mostrando a necessidade de alterações na mesma.

Tal como já foi anteriormente referido, existem muitas realidades que justificam as reformas e as soluções adaptadas. A questão demográfica, a globalização da economia, e as implicações no mercado de trabalho e na vida dos cidadãos, veio reforçar a necessidade de mudança dos sistemas actuais, que futuramente terão de apresentar maior capacidade de resposta, sendo mais flexível e expandida, no sentido de garantir protecção e dar apoio face aos riscos sociais que surjam.

Como já se referiu na secção 2.2, as estruturas familiares têm-se transformado, tornando-se necessário adequar a protecção dos pensionistas e a das restantes fases da vida da população. Em Portugal a fecundidade diminuiu, e foi simultaneamente acompanhada de um progressivo aumento de esperança média de vida aos 65 anos. Todas estas realidades fazem com que os sistemas de protecção social se devam adaptar, pois estes formaram-se para situações económicas e sociais diferentes das actuais, e das que se prevêem.

Neste sentido, a crise de sustentabilidade dos sistemas de Segurança Social ocorre essencialmente das perturbações existentes na demografia e na economia, que afectam os sistemas geridos em regime de repartição e os de capitalização individual. Contudo a individualização dos riscos depende de diversos factores, como a inflação, o crescimento económico, a evolução do mercado de capitais. Estes factores influenciam qualquer um dos sistemas, os de repartição e os de capitalização. Esta relação entre os sistemas de pensões de repartição e de capitalização, faz com que a substituição do primeiro pelo segundo, traga níveis desajustados de protecção, especialmente para os indivíduos com menor capacidade financeira, tendo como consequência uma redução do nível de protecção social.

Num contexto em que a idade média da população tende a subir e a proporção dos activos face aos reformados tende a decrescer o grande desafio é encontrar uma forma sustentável de financiamento do sistema público de Segurança Social em sistema de repartição.

Não se vislumbrando uma transição abrupta e imediata para o sistema de capitalização, os Fundos de Pensões privados são uma boa opção (a nível do segundo e terceiro pilares) para complementar a protecção na reforma, invalidez ou mesmo doença.

Atendendo ao impacto que o aumento da esperança média de vida tem na avaliação de responsabilidades, é objectivo deste trabalho estudar a importância desta variável numa avaliação actuarial de responsabilidades de um Fundo de Pensões. Para tal nas próximas duas secções ir-se-á abordar os Fundos e Planos de Pensões.

3. Fundos de Pensões e Sistemas de Pensões

Nesta secção apresenta-se um breve resumo de conceitos relacionados com Fundos de Pensões e Sistemas de Pensões. Apresenta-se também breves estatísticas sobre Fundos de Pensões em Portugal.

3.1. Conceitos

Antes de nos debruçarmos sobre os Fundos de Pensões, é importante definir o que é um Plano de Pensões. Os *Planos de Pensões* definem as condições em que se constitui o direito ao recebimento de uma pensão a título de reforma por invalidez, por velhice ou ainda em caso de sobrevivência ou de qualquer outra contingência equiparável, de acordo com as disposições no Dec. Lei n.º 12 de 20 de Janeiro de 2006.

Nos planos de pensões existem as figuras de *associados* e *participantes*, sendo os primeiros pessoas colectivas cujos planos de pensões são objecto de financiamento por um fundo de pensões e os segundos, os *participantes* de um plano, as pessoas singulares com direitos consignados nos planos de pensões, independentemente de contribuírem ou não para o seu financiamento. Existem ainda os *contribuintes*, *beneficiários* e *aderentes* ao fundo de pensões. Os contribuintes do plano são pessoas que contribuem para o fundo, ou então pessoas colectivas que efectuem contribuições em nome ou a favor dos participantes. Os segundos, são pessoas singulares com direito a benefícios estabelecidos no plano de pensões quer tenham sido ou não participantes. Por fim os *aderentes* são pessoas singulares ou colectivas que aderem a um fundo de pensões aberto. (Diário da República, 20 de Janeiro de 2006)

Os benefícios que podem existir num Plano de Pensões são a pensão de reforma por velhice, a pensão por reforma antecipada, a pré-reforma, a invalidez, a sobrevivência (viuvez e/ou orfandade).

Com base nas garantias estabelecidas, os planos de pensões classificam-se em planos de *contribuição definida* (CD), de *benefício definidos* (BD) e ainda *mistos*.

No *plano de pensões de contribuição definida*, as contribuições definem-se previamente, e o benefício resulta do montante das contribuições entregues e rendimentos acumulados. Neste caso o benefício depende do modo que a empresa decide distribuir as suas contribuições pelos colaboradores, assim como a valorização e rendimento de activos financeiros em que as contribuições forem investidas.

Ainda existem diferentes formas de definição de contribuição, os de contribuição salarial definida, onde se constituem contas individuais e se depositam montantes percentuais do salário constantes, sendo capitalizados num meio de capitalização. E os de contribuição nominal definida, onde também se constituem contas individuais, e se depositam quantias constantes.

Caso os benefícios sejam previamente definidos e as contribuições se calculem de modo a garantir o pagamento dos benefícios, o plano designa-se por *plano de pensões de benefício definido*. Os planos de pensões de benefício definido podem ser muito diversificados, cada empresa pode adequar um esquema de benefícios aos seus objectivos e às suas possibilidades financeiras. De seguida enumeram-se, seguindo por exemplo (Carvalho, 1993) e (ISP 2007), alguns tipos de planos mais comuns:

- *Final Pay Plan*: garante uma pensão de reforma igual a uma percentagem do salário final.
- *Average Final Pay Plan*: garante uma pensão que é uma percentagem sobre a média dos salários dos últimos K anos.
- *Career Average Pay Plan*: garante uma pensão calculada como percentagem da média de toda a carreira enquanto participante do plano.
- Valor fixo: a pensão é um valor fixo por ano de participação no plano, ou um valor fixo global à data de reforma.

Relativamente à Segurança Social um plano pode ser:

- Complementar Integrado: os montantes estabelecidos são um complemento à pensão da Segurança Social.
- Complementar não integrado: se existe um limite superior para a soma da pensão atribuída pelo plano com a pensão da Segurança Social.
- Independente: os valores garantidos não dependem da pensão da Segurança Social.

Por fim existem os *planos de pensões mistos*, onde se conjugam as características de benefício definido e de contribuição definida, ou seja garantem benefícios definidos e benefícios resultantes de contribuições definidas.

Tratando-se de planos diferentes relativamente ao tipo de benefício, estes possuem vantagens e desvantagens. De seguida apresenta-se as *vantagens e desvantagens* dos diferentes planos.

No plano de benefício definido é garantida uma pensão *a priori*, existindo a possibilidade de relacionar o montante da pensão com o salário. Este tipo de plano é de fácil integração na Segurança Social. As responsabilidades com serviços passados são fáceis de determinar. No ponto de vista de empresa, o conhecimento do reembolso final torna possível investir em activos adequados, contribuindo para uma boa performance em investimentos. Existe a possibilidade de cobertura dos serviços passados, resolvendo situações de empregados com mais anos de serviço. Como pontos menos positivos, existe da parte do Associado uma incerteza relativamente à evolução do custo do esquema, possuindo uma maior exposição ao risco de investimento, daí a necessidade de um nível de financiamento e de avaliações actuariais periódicas.

No ponto de vista do participante as vantagens deste tipo de plano são essencialmente o conhecimento do benefício final e a menor exposição ao risco de investimento. As principais desvantagens são a ausência de informação individual sobre o valor investido e no caso da não existência de direitos adquiridos a perda do benefício em caso de perda de vínculo com o Associado.

No plano de contribuição definida, o custo é conhecido e fixo para o Associado, e os custos de gestão são inferiores aos de benefício definido. O conhecimento dos custos, e a possibilidade de não existência de um nível de financiamento a cumprir, torna este tipo de plano mais simples e com um menor custo para gerir.

Como pontos menos positivos, há a referir a dificuldade em financiar o serviço prestado a participantes que tenham mais anos de serviço à data de início do plano, podendo o benefício não os satisfazer, devido a não disporem de tempo suficiente para uma capitalização razoável das suas contribuições. Por outro lado, o risco de investimento recai inteiramente sobre os beneficiários que em conjunto com a incerteza do benefício final (isto é, o não conhecer-se o montante da pensão no momento de reforma) constituem as principais desvantagens deste tipo de planos.

Possui a vantagem, para o Associado, de não existência de responsabilidade por financiar, a sua responsabilidade resume-se ao montante de contribuição acordada, se for caso disso. Do ponto de vista do participante, a conta individual possibilita o conhecimento do valor a cada momento. São os beneficiários do plano que beneficiam de uma performance favorável de investimento.

Comparativamente ao plano de benefícios definidos, este plano torna-se mais difícil de integrar na Segurança Social.

Consoante o seu *financiamento* os planos classificam-se em *contributivos* e *não contributivos*. Se contributivos, os participantes e o associado contribuem para o plano, caso sejam não contributivos, o plano é financiando somente pelo associado. No caso dos planos não contributivos é possível não existirem direitos adquiridos em caso de saída antecipada da empresa. Contudo nos contributivos se a contribuição for obrigatória surge a necessidade da existência de direitos adquiridos.

Estes *direitos adquiridos* caracterizam-se pelo acesso a benefícios do plano após a quebra do vínculo laboral com a empresa. Aqui o colaborador tem o direito de transferir o valor da conta para outro esquema compatível ou então manter a conta que tem, continuando a capitalizar, não contribuindo mais.

Os *Fundos de Pensões* constituem patrimónios exclusivos à realização de um ou mais planos de pensões, ou seja, funcionam como veículos de financiamento do Plano de Pensões.

Os Fundos de Pensões podem classificar-se como *fechados* ou *abertos*, podendo estes últimos permitir adesões individuais ou colectivas. Um fundo de pensões é *fechado* quando diz respeito a um só associado ou no caso de existirem vários associados, se houver um vínculo de natureza empresarial, associativo, profissional ou social entre eles, e a adesão de novos associados dependa de um acordo. Um fundo de pensões é *aberto* se não for exigida a existência de vínculo entre os diferentes aderentes ao fundo, e as novas adesões dependem apenas da aceitação por parte da entidade gestora.

Nos Fundos de Pensões fechados existe a possibilidade de desenvolver uma estratégia de gestão pensada para o associado em questão, tendo em atenção características dos participantes e o perfil de risco que os caracterizam. Contudo este tipo de fundo necessita de uma certa dimensão, de modo a permitir a implementação de uma estratégia de gestão

eficiente. Os Fundos de Pensões abertos asseguram um plano de pensões próprio e viabilizam uma diversificação acrescida e uma melhor gestão.

O património de um fundo de pensões pode financiar simultaneamente planos de pensões e planos de benefícios de saúde². Caso seja gerido de forma conjunta, deve existir uma clara identificação da quota-parte do património afecto a cada plano. Os planos de benefícios de saúde só podem ser financiados através de Fundos de Pensões fechados e de adesões colectivas a Fundos de Pensões abertos. Os Planos de Benefício de Saúde não são objecto de estudo neste trabalho.

3.2.Fundos de Pensões e Sistemas de Pensões em Portugal

No ano 2007 (ISP, 2007) verificou-se uma predominância dos Planos de BD (95,3%) relativamente ao montante total dos Fundos de Pensões. Contudo a taxa dos montantes dos planos de CD tiveram nesse ano um maior crescimento relativamente à dos planos de BD, 12% contra 5%. Havendo também um aumento do número de planos de CD, 43,6% em 2006 para 49,7% em 2007. Havendo uma tendência para o crescimento de planos de CD.

Tomou-se como ponto de partida, para a aplicação prática, a análise de um plano de benefício definido, não só por serem os mais predominantes mas em especial por terem avaliações actuariais mais complexas do que os planos de contribuição definida.

No ano 2007 (ISP, 2007), em Portugal existiam cerca 200 Fundos de Pensões fechados e adesões colectivas, deste 94, 4% eram como fechados, existiam cerca de 54 abertos de adesões individuais de fundos abertos, PPR/E, PPA e outras adesões individuais.

Veja-se o seguinte gráfico que demonstra a repartição do montante total dos Fundos de Pensões por tipo de pensões:

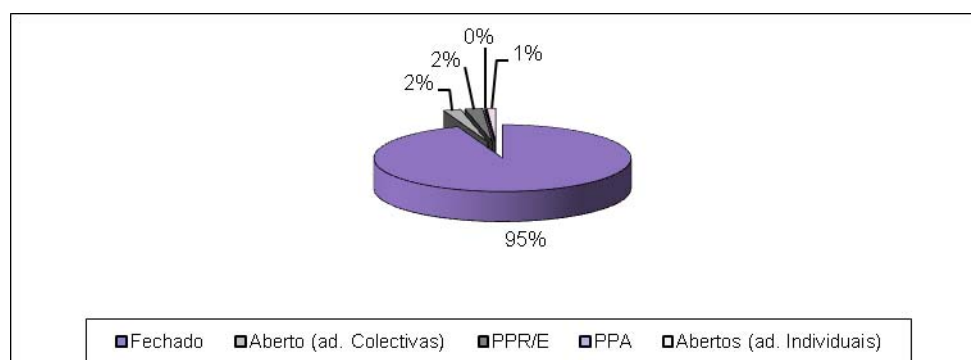


Figura 9 – Repartição do montante total dos Fundos de Pensões (Fonte: Fundos de pensões 2007)

² Plano de benefícios de saúde é o programa estabelecido por uma pessoa colectiva que define as condições em que se constitui o direito ao pagamento ou reembolso de despesas de saúde da responsabilidade da pessoa colectiva decorrentes da alteração involuntária do estado de saúde do beneficiário do plano e havidas após a data da reforma por velhice ou invalidez, sobrevivência, pré-reforma ou reforma antecipada. Art. 2º (Diário da República, 20 de Janeiro de 2006)

Como a maioria dos planos de pensões são fechados iremos considerar na aplicação prática um plano de pensões fechado.

Relativamente aos pressupostos usados numa avaliação, para cálculo de responsabilidades tem-se diferentes tábuas de mortalidade, tal como se apresenta de seguida na figura:

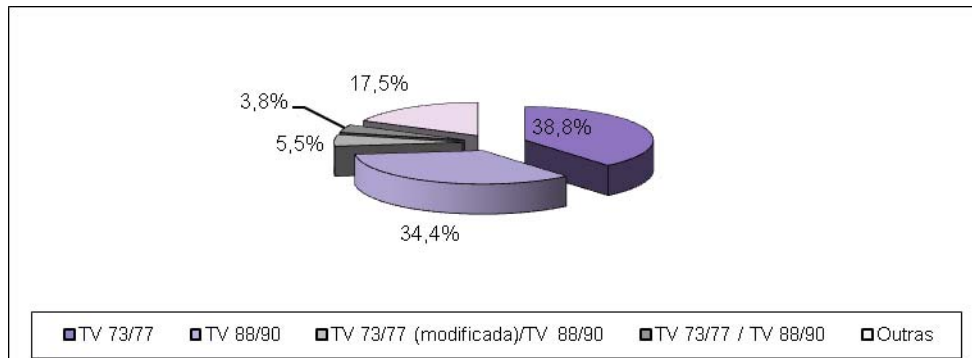


Figura 10 – Mortalidade dos participantes (Fonte: Fundos de pensões 2007)

Como se verifica a tábua de mortalidade TV73/77 é a mais usada, sendo a que se irá utilizar no capítulo 5.

Já as taxas de desconto mais utilizadas encontram-se entre 4,5% e 5,5%, as de crescimento de pensões são de 1% a 2 % e de crescimento salarial entre 2,5% e 3% vide (Fundos de pensões 2007).

4. Desenho de um Plano de Pensões

Um plano de Pensões elabora-se em colaboração com o Associado. Inicia-se por definir o tipo de plano (BD, CD ou Misto), e define-se a natureza do plano, ou seja se é ou não dependente da SS.

De seguida define-se os participantes, os beneficiários, definindo-se também o modo de cálculo de salário pensionável e os benefícios. A forma de pagamento das pensões é, geralmente, o último ponto a pensar, optando-se por se fazer o pagamento através do fundo ou pela aquisição de uma renda a uma seguradora, transferindo assim o risco de longevidade.

No desenho dos planos é importante definir a *elegibilidade* do mesmo, ou seja condição a verificar para ser participante/beneficiário do plano, ou mesmo a *portabilidade*, os direitos adquiridos, que existem sempre que os participantes mantenham o direito aos benefícios, independentemente da manutenção ou da cessação do vínculo existente com o associado de acordo com as regras definidas.

Na construção de um plano de pensões deve-se ter presente todos os factores que o influenciam, ou seja, se a empresa é PME ou de grandes dimensões, se o grupo etário é relativamente novo ou idoso. E do ponto de vista de empresa deve-se ter em consideração a situação económica e financeira, bem como a política salarial existente ou pretendida. Também é preciso ter em consideração a evolução dos efectivos, e se existem ou não reformados, ou mesmo acordos prévios. E por fim a intenção de fazer os participantes contribuírem ou não para o fundo.

De seguida apresenta-se o modo de avaliação dos Planos de pensões.

4.1. Avaliação Actuarial de Plano de Pensões

A avaliação actuarial de um plano de pensões corresponde à avaliação das responsabilidades do fundo num dado período de tempo, de acordo com um determinado método actuarial. Para tal, num plano de BD, determina-se a responsabilidade actuarial, o custo normal e o nível de financiamento, conceitos a definir mais adiante. Já num plano de CD, a avaliação actuarial consiste na estimativa de benefício futuro, não sendo tão complexa quanto no BD. Consiste na projecção da conta individual de cada participante tendo em atenção as contribuições a efectuar e a taxa de rendimento esperada.

A avaliação actuarial num plano de BD permite obter um esquema de custos com vista a médio e longo prazo. Permite determinar as contribuições a efectuar pelo Associado de modo a garantir o equilíbrio financeiro do Fundo de Pensões relativamente às responsabilidades inerentes a este, e permite determinar também a responsabilidade actuarial. Esta última consiste no apuramento do valor actual das pensões em pagamento da população reformada e das responsabilidades por serviços passados, ou seja, o valor necessário para fazer face aos benefícios relativos ao tempo de serviço já prestado à data,

para a população activa. Ainda neste âmbito permite determinar o nível de financiamento do fundo para se decidir se é necessário o Associado proceder a uma contribuição extraordinária para que o fundo possa assegurar o pagamento dos benefícios consignados no Plano de Pensões.

A avaliação actuarial é de toda a importância no processo de desenho do Fundo de Pensões. Permite preparar relatórios para os impulsionadores do plano, com vista a definir o esquema de custos e o nível de financiamento. Desta forma é possível ajustar a forma de cálculo de benefício e o tipo de benefícios envolvidos antes de constituir o fundo de pensões.

Para se proceder a uma avaliação actuarial é necessária várias informações:

- População: informação por participante/beneficiário, como o número identificativo e único do indivíduo, o grupo em que se encontra activo ou reformado, o sexo do participante/beneficiário, a data de nascimento, a data de admissão na empresa (activos), e na SS (se plano for de natureza complementar à mesma), o salário pensionável (somente para activos), o tipo de benefício de que se trata e o valor de pensão (somente para os pensionistas) e outra informação relevante para o cálculo do benefício.
- Pressupostos actuariais: tabelas de mortalidade, invalidez, de probabilidade de saída do grupo, de reforma, outras.
- Pressupostos financeiros: taxas de crescimento salarial futuro, de crescimento de pensões, de rendimento do fundo, bem como a taxa técnica actuarial.

As taxas de crescimento salarial e de pensão são importantes para determinar o nível de crescimento das responsabilidades do plano. Estas taxas influenciam o plano a partir do momento em que os benefícios estão indexados aos salários.

A taxa de rendimento do fundo é usualmente fixada num valor que representa o retorno esperado dos activos representativos do plano nos anos futuros.

A taxa técnica actuarial é a taxa de juro teórica utilizada para descontar os passivos.

Existem muitos outros pressupostos actuariais relacionados com o plano tal como a evolução da pensão da Segurança Social, a elegibilidade, a idade normal de reforma, o número de pagamentos de pensão no ano, a definição de limites de tempo de serviço, o modo de pagamento (rendas vitalícia, remição parcial/total do capital), os direitos adquiridos entre outros.

No Dec-Lei nº 12/2006 de 20 de Janeiro no seu artigo 76º são enunciados os princípios de cálculo de responsabilidade:

“... o cálculo das responsabilidades a financiar nos planos de pensões de benefício definido ou mistos é efectuado com base nos seguintes princípios:

a) Métodos actuariais reconhecidos que assegurem que o montante do fundo seja adequado aos compromissos assumidos no plano de pensões e às contribuições previstas;

- b) Pressupostos de avaliação prudentes, nomeadamente, taxas de juro e tabelas de mortalidade e de invalidez prudentes e adequadas que contenham, caso se justifique, uma margem razoável para variações desfavoráveis;
- c) Método e pressupostos de cálculo consistentes entre exercícios financeiros, salvo alterações jurídicas, demográficas ou económicas subjacentes relevantes.”

De modo a proceder à avaliação em si é preciso definir o método de financiamento a seguir no cálculo das responsabilidades. O valor actual do benefício de reforma deve estar financiado quando o participante passa a beneficiário. O método de financiamento indica como é que esse financiamento é feito no decorrer do período activo do participante.

O escolher um método em prol de outro não altera o custo final do plano, apenas tem como consequência a distribuição anual dos custos no decorrer do tempo em que se forma o património do fundo.

De um modo geral os métodos com contribuições mais altas nos primeiros anos fazem com que o fundo cresça mais rapidamente, tendo rendimentos financeiros que podem fazer diminuir o custo final do plano. Os métodos de financiamento variam entre um *Pay as you Go* até um *Initial Funding* distribuídos por 6 classes. No *Pay as You Go* os benefícios pagos aos pensionistas são financiados pelas contribuições dos actuais trabalhadores, não se processam quaisquer contribuições até ao momento em que é preciso pagar o benefício e não existe um financiamento de responsabilidades. No *Initial Funding* o associado financia a totalidade das responsabilidades com o participante, assim o fundo encontra-se sempre financiado. O método de financiamento utilizado no presente trabalho é um método da classe 3 o *Unit Credit*. É o método de referência do ISP no ponto 14 da sua Norma Regulamentar de 1991 (ISP, Norma Regulamentar Nr 298/1991, 13 de Novembro de 1991) alterada em 1996 (ISP, Norma Regulamentar Nr. 21/1996, 05 de Dezembro de 1996) e IAS 19 (Norma Internacional de Contabilidade IAS19, Actualizada em 2002) nos parágrafos 64 a 66. Como os salários são projectados à Idade Normal de Reforma, ir-se-à utilizar o método *Projected Unit Credit*.

O método implica que o financiamento dos benefícios é realizado antecipadamente, através do pagamento das responsabilidades que se prevêem acrescer em cada ano de serviço, uma vez que o benefício total à INR é dividido em tantas partes quanto o número total de anos de serviço. Assim, no início de cada ano, a contribuição normal corresponde ao pagamento das responsabilidades que se prevêem acrescer durante esse ano e, deste modo, o Fundo Normal não é mais do que o valor das responsabilidades actuariais dos anos anteriores que, no final de cada ano, deveriam estar já financiadas logo, em termos simples a responsabilidade actuarial no final de cada ano.

A vantagem deste método é o permitir a separação das responsabilidades por serviços passados das responsabilidades por serviços futuros. As responsabilidades por serviços passados obtêm-se a partir do quociente entre o tempo de serviço decorrido e o tempo de serviço total estimado aplicado ao valor actual dos benefícios totais.

A principal desvantagem deste método é a de trazer custos anualmente crescentes, e não permitir um ajustamento automático de custos derivados de ajustamentos no quadro de

efectivos, mesmo que haja ajustamentos salariais. Contudo, o principal objectivo do *Projected Unit Credit* é o de manter o nível do fundo a 100%. Este método permite o financiamento do valor actual do benefício de um participante ao longo da sua vida activa. (Winklevoss, 1993) prova que realizando o financiamento pelo *Projected Unit Credit* o valor actual dos benefícios futuros iguala o valor actual das contribuições normais futuras determinadas pela da próxima secção, 4.3 (vide (Winklevoss, 1993) fórmulas 6.2a a 6.2c).

Na secção que se segue expõe-se a notação utilizada e formulário actuarial necessário à avaliação pelo método *Projected Unit Credit*. O formulário apresentado é o usualmente utilizado, pode ser consultado por exemplo em tempo contínuo em (Bowers, Gerber, Hickman, Jones, & Nesbitt, 1986), em tempo discreto em (Winklevoss, 1993) e (Afonso, 2008/09).

4.2. Notação

Para uma boa compreensão das fórmulas utilizadas neste trabalho, considere-se a seguinte notação:

x - idade actual do participante k
 $x+n$ - idade x adicionada de n períodos
 l_x - número de indivíduos com idade x da tábua de mortalidade
 w - idade limite de tábua de mortalidade

i - taxa de juro técnica das pensões
 r - taxa de rendimento do fundo
 s - taxa de crescimento salarial
 $v = (1+i)^{-1}$ factor de actualização
 $(1+r)^t$ - aumento de rendimento do fundo verificado t anos após a data actual
 $(1+s)^t$ - aumento salarial verificado t anos após a data actual

INR - Idade Normal de Reforma (actualmente em 65 anos)
 B_k - valor de benefício anual do participante k
 sal_k - salário mensal actual do participante k
 $nSal$ - número de pagamentos de salários no ano, do participante k , usualmente 14

P_k - pensão anual em pagamento ao beneficiário k
 m - número de fracções em que renda vitalícia se subdivide, usualmente 14

N - número de activos
 Nr - número de beneficiários
 TST_k - tempo de serviço total do participante k
 TSP_k - tempo de serviço passado do participante k
 TSF_k - tempo de serviço futuro do participante k

⁶ Ver por exemplo (Winklevoss, 1993)

4.3. Tendências da mortalidade

A tábua biométrica é uma forma de resumo da vida dos indivíduos de uma população, que indica o número de pessoas vivas por idade e sexo. Esta probabilidade depende de diversas variáveis, como a idade, sexo, entre outros factores. A idade é o factor de risco de maior relevância, tornando-se essencial e ligado à construção de qualquer tábua biométrica.

Antes de apresentar as tendências da mortalidade apresentam-se algumas noções base da mesma.

4.3.1. Noções base de mortalidade

Nesta secção definem-se mais alguns conceitos importantes de matemática actuarial que são abordados no presente trabalho. Para as notações procurou-se usar as convenções determinadas pelo *Internacional Actuarial Association's Permanent Committee on Notation*.

▪ Função de sobrevivência

A função de sobrevivência denota-se por $s(x)$ e representa a probabilidade de um recém-nascido sobreviver até à idade x .

Considerando-se que a idade de morte de uma pessoa recém-nascida $-X-$ é uma variável aleatória contínua e $F_x(x)$ a função de distribuição de X :

$$F_x(x) = \Pr(X \leq x), x \geq 0,$$

a função de sobrevivência define-se como:

$$s(x) = 1 - F_x(x) = \Pr(X > x), x \geq 0$$

Como $F_x(0)=0$ então $s(0)=1$

▪ Probabilidade de morte

O tempo futuro de vida de (x) , $X-x$, denota-se por $T(x)$.

$${}_nq_x = \Pr(T(x) \leq n) = \Pr(X \leq x+n | X > x) = \frac{\Pr(x < X \leq x+n)}{\Pr(X > x)} = \frac{F(x+n) - F(x)}{s(x)} = \frac{s(x) - s(x+n)}{s(x)}$$

$${}_np_x = 1 - {}_nq_x = \Pr(T(x) > n), n \geq 0.$$

O símbolo ${}_nq_x$ representa a probabilidade de (x) morrer no período de n anos. ${}_np_x$ é a probabilidade de (x) sobreviver à idade $x+n$. Tem-se, também, que ${}_0p_x=1$ e ${}_0q_x=0$.

▪ Força de mortalidade

A força de mortalidade denota-se por $\mu(x)$, e mede a intensidade da morte instantânea, expressa a probabilidade condicional de (x) morrer entre x e $x+dx$.

Ou seja:

$$\mu(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F_x(x+dx) - F_x(x)}{1 - F_x(x)} = \frac{-s'(x)}{s(x)}$$

onde

$$\mu(x) \geq 0 \quad (1)$$

$$\mu_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

Existem ainda as seguintes formas de equivalência das equações expostas acima, que se obtêm através das fórmulas:

$${}_t p_x = \exp \left\{ - \int_0^t \mu_{x+s} ds \right\} \quad (2)$$

Assim, estas probabilidades e força de mortalidade relacionam-se na seguinte fórmula de probabilidade de morte de (x) antes da idade x+t:

$${}_t q_x = \int_0^t {}_s p_x \mu_{x+s} ds \quad (3)$$

▪ Funções de sobrevivência compostas

A função de sobrevivência composta⁶, representa a probabilidade de um participante activo estar ao serviço do Associado (sobreviver) num certo período, tendo em atenção o conjunto de taxas de decrementos a que se encontra exposto, como morte, invalidez, saída ou outras.

Como no plano avaliado os decrementos existentes serão a morte e a invalidez, apenas se apresenta sobrevivência composta com dois decrementos. Para mais decrementos consultar por exemplo (Winklevoss, 1993).

Considere-se:

$q_x^{(m)}$ = taxa de mortalidade

$q_x^{(i)}$ = taxa de invalidez

Estas taxas são obtidas a partir das respectivas tábuas de um único decremento (no caso em estudo TV 73/77 para mortalidade e EKV 80 para invalidez).

Um pressuposto usual para transformação de uma taxa de decremento em probabilidade de múltiplos decrementos é todos os decrementos ocorrerem numa base uniforme durante o ano, ou seja uma distribuição uniforme de morte⁷. Tendo $q^{(m)}$ e $q^{(i)}$ como taxas unidecremento para a causa morte e invalidez, respectivamente, e $q^{(m)}$ e $q^{(i)}$ como probabilidade de morte e de invalidez em ambiente multidecremento, a transformação da

⁷ Ver por exemplo (Bowers, Gerber, Hickman, Jones, & Nesbitt, 1986).

taxa unidecremento em probabilidade num duplo decremento, sob um pressuposto de distribuição uniforme de morte, é dada por:

$$q_x^{(m)} = q_x^{(i)} \left(1 - \frac{1}{2} q_x^{(m)} \right) \quad (4)$$

$$q_x^{(i)} = q_x^{(m)} \left(1 - \frac{1}{2} q_x^{(m)} \right) \quad (5)$$

Assim a probabilidade de um participante activo de idade x sobreviver um ano é:

$$p_x^{(T)} = 1 - (q_x^{(m)} + q_x^{(i)}) \quad (6)$$

e a probabilidade de sobrevivência do serviço activo, tendo em atenção os decrementos de morte e invalidez, para n anos é igual ao produto de sucessivos anos compostos por probabilidades de sobrevivência:

$${}_n p_x^{(T)} = \prod_{t=0}^{n-1} p_{x+t}^{(T)} \quad (7)$$

▪ Esperança média de vida

O valor esperado da variável aleatória tempo futuro de vida denota-se por e_x^0 e designa-se por esperança de vida à nascença. Por definição tem-se:

$$e_x^0 = E(T(x)) = \int_0^{\infty} t {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^{\infty} {}_t p_x dt \quad (8)$$

A variável aleatória $K = \lfloor T \rfloor$ usa-se para representar o tempo de vida futura em anos completos de (x). Ao valor esperado de K chama-se esperança de vida incompleta de (x).

$$\begin{aligned} e_x &= E(K_x) = \sum_{k=0}^{\infty} k * \Pr(K_x = k) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k * \frac{d_{x+k}}{l_x} = \frac{d_{x+1} + 2d_{x+2} + 3d_{x+3} + \dots}{l_x} = \\ &= \frac{(l_{x+1} - l_{x+2}) + 2(l_{x+2} - l_{x+3}) + 3(l_{x+3} - l_{x+4}) + \dots}{l_x} = \\ &= \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \dots}{l_x} = \sum_{K=1}^{\infty} {}_K p_x \end{aligned} \quad (9)$$

É possível relacionar as expressões anteriores, assumindo uma distribuição uniforme de mortes (Bowers, Gerber, Hickman, Jones, & Nesbitt, 1986) e aproximando o integral pela regra dos trapézios:

$$\begin{aligned}
 e_x^0 &= \int_0^{\infty} {}_t p_x dt \approx \frac{1}{2} * ({}_0 p_x + {}_1 p_x) + \frac{1}{2} * ({}_1 p_x + {}_2 p_x) + \dots \\
 &= \frac{1}{2} * {}_0 p_x + \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x = \\
 &= e_x + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Assim, a esperança média de vida à nascença é aproximadamente igual à esperança de vida incompleta mais meio ano.

4.3.2. Modelo de projecção de mortalidade

Ao tentar escolher um modelo para previsão da tendência da mortalidade, é importante observar se o modelo escolhido reflecte a mortalidade actual.

Para estimar a mortalidade ajustada utilizam-se modelos paramétricos (globais) e não paramétricos (locais), na nomenclatura de (Haberman & Renshaw, 1996). Normalmente os ajustamentos efectuem-se através de modelos paramétricos, por ajuste das probabilidades de morte ou das forças de mortalidade a um modelo matemático. Os modelos matemáticos mais usuais representam funções de sobrevivência com base nas leis de mortalidade, tais como as de Moivre, Gompertz, Makeham e Weibull (Bowers, Gerber, Hickman, Jones, & Nesbitt, 1986).

Uma tábua biométrica de mortalidade define-se como um conjunto de probabilidades de mortes anuais por idade. A construção deve ter em consideração um período histórico de estudo superior a um ano, de modo a se ter uma base de dados que se possa estimar. (Haberman & Renshaw, 1996) e (Renshaw & Haberman, 2000) utilizam quatro anos e na elaboração de algumas tábuas biométricas disponíveis no mercado foram utilizados até seis anos de dados.

O primeiro modelo a ser reconhecido para fins actuariais foi o modelo de Gompertz (1825), cuja limitação é o de considerar somente o factor morte natural no modelo matemático BC^x .

O modelo de Gompertz considera que a força de mortalidade cresce exponencialmente com a idade, após a maturidade sexual. Para além disso para elaboração de tabelas biométricas de mortalidade inclui-se a dimensão temporal de esperança média de vida. Neste sentido propôs o primeiro modelo matemático para definir a relação entre a força de mortalidade e a idade, usa-se o seguinte modelo:

$$\mu_x = BC^x \quad (10)$$

Esta força de mortalidade pode interpretar-se como uma fórmula de evolução para a idade, afectada pelo factor multiplicativo para ajustar os efeitos dos anos.

Assim, tomando a força de mortalidade com os seguintes parâmetros: B e C constantes, e $0 < B < 1$ e $C > 1$, e são características de cada população e $x > 0$, que corresponde à idade tem-se a seguinte função de mortalidade: $\mu_x = BC^x$ e função de sobrevivência:

$$S_x(t) = \exp \left\{ - \int_x^{x+t} BC^r dr \right\} \quad (11)$$

Se se tomar $C^r = \exp \{ r \log C \}$ de modo a parametrizar-se a constante C, tem-se a seguinte expressão:

$$S_x(t) = \exp \left\{ - \frac{B}{\log C} C^x (C^t - 1) \right\} \quad (12)$$

Assim com B e C constantes tem-se:

$${}_t P_x = g^{(C^{x+t} - C^x)} \quad (13)$$

onde

$$g = 10^{-B/\log C}$$

Tendo $\mu_x = BC^x$ e aplicando-se logaritmo de base 10 a ambos os membros, tem-se a seguinte expressão do tipo linear:

$$\log \mu_x = \log B + \log C^x = \log B + x * \log C = d + m * x \quad (14)$$

Donde:

$$\begin{aligned} y = \log \mu_x &\Leftrightarrow \mu_x = 10^y \\ d = \log B &\Rightarrow B = 10^d \\ m = \log C &\Rightarrow C = 10^m \end{aligned} \quad (15)$$

A força de mortalidade pela lei Gompertz aumenta exponencialmente com a idade, não tendo limite de idade.

4.3.3. Formulário para avaliação do Plano

MS – massa salarial, $MS = \sum_{k=1}^N sal_k . nSal$

a_{INR}^* - Renda vitalícia à Idade Normal de Reforma. A renda pode ser antecipada ou postecipada, inteira ou fraccionada, constante ou crescente. A notação * indica uma renda vitalícia genérica. Para consulta de formulário para rendas vitalícias sugere-se por exemplo secção 2.2 de (Neill, 1992).

VAB – valor actual do benefício (pensão de reforma por velhice) do participante k

$$VAB = B_k \frac{1}{(1+r)^{TSF_k}} \cdot p_{x_k}^* \cdot a_{INR}^* \quad (16)$$

VABT – valor actual dos benefícios totais da população activa para o benefício reforma por velhice

$$VABT = \sum_{k=1}^N B_k \frac{1}{(1+r)^{TSF_k}} \cdot p_{x_k}^* \cdot a_{INR}^* \quad (17)$$

VAPP – valor actual das pensões a pagamento, montante que deve existir à data da avaliação para fazer face às responsabilidades assumidas com os actuais beneficiários

$$VAPP = \sum_{k=1}^{Nr} P_k \cdot a_{x_k}^* \quad (18)$$

CN(%) – custo normal em percentagem da massa salarial, de modo a determinar o custo em valor absoluto multiplica-se CN(%) pela MS. Representa o custo anual associado a cada ano de serviço prestado pelos participantes activos.

$$CN(\%) = \frac{\sum_{k=1}^N b_k \cdot S_k \cdot \frac{(1+s)^{TSF_k}}{(1+r)^{TSF_k}} \cdot p_{x_k}^* \cdot a_{INR}^* \cdot \frac{1}{TST_k}}{MS} \times 100 \quad (19)$$

FN – fundo normal que corresponde à responsabilidade actuarial, numa base de proporcionalidade entre o tempo de serviço passado de cada um e o tempo de serviço total.

$$FN = \sum_{k=1}^N b_k \cdot S_k \cdot \frac{(1+s)^{TSF_k}}{(1+r)^{TSF_k}} \cdot p_{x_k}^* \cdot a_{INR}^* \cdot \frac{TSP_k}{TST_k} \quad (20)$$

O valor actual do benefício total, se existirem diversos benefícios (velhice, invalidez, sobrevivência), corresponde à soma dos vários VABT como indicado na próxima secção.

4.3.4. Tipos de cobertura

Num plano existem diferentes tipos de cobertura enquanto participante ou beneficiário. Enquanto participante podem existir as seguintes coberturas para além da velhice: a invalidez e a de sobrevivência, podendo esta ser imediata e diferida, direitos adquiridos, entre outras.

Por exemplo, na cobertura de invalidez é pago um benefício se o participante se invalidar, sendo aquele normalmente calculado tendo por base o salário e o TSP à data de invalidez. No caso de existência de uma cobertura de sobrevivência imediata, existe um benefício que é pago ao cônjuge sobrevivente no caso de o participante falecer enquanto activo e na sobrevivência diferida o benefício é pago ao cônjuge sobrevivente, se o participante falecer após se ter reformado, i.e. enquanto beneficiário.

Os beneficiários podem ser de reforma por velhice, invalidez, sobrevivência (viuvez e/ou orfandade).

Assim o CN total é a soma de cada uma das coberturas, bem como o VABT corresponde ao VABT de todas as coberturas como se indica na fórmula 21. Como se pode consultar por exemplo em (Bowers, Gerber, Hickman, Jones, & Nesbitt, 1986) a teoria para financiamento de outras contingências para além da velhice é uma generalização desta última.

$$\begin{aligned} CN_x &= CN_x^{velhice} + CN_x^{invalidez} + CN_x^{sobr.imediata} + CN_x^{sobr.diferida} + \dots \\ VABT_x &= VABT_x^{velhice} + VABT_x^{invalidez} + VABT_x^{sobr.imediata} + VABT_x^{sobr.diferida} + \dots \end{aligned} \quad (21)$$

No capítulo que se segue apresentam-se a metodologia e a aplicação prática no presente estudo.

5. Metodologia e Aplicação Prática

Neste capítulo apresenta-se o plano de pensões a avaliar, bem como os seus benefícios. Iniciar-se-á por definir o plano de pensões aplicado na presente avaliação na secção 0 que se apresenta de seguida. Na secção seguinte apresenta-se o método usado na avaliação, de seguida as estatísticas da população existente no plano, por fim apresentam-se as tabelas de decrementos aplicadas na avaliação.

5.1. O Plano de Pensões

Considere-se que se trata de um plano de pensões de benefício definido. Cujas avaliação é uma *full valuation*. Assim, é necessário efectuar previamente à avaliação das responsabilidades uma análise estatística da população para se compreender as características da população.

A *elegibilidade* do plano aplica-se a todos os empregados permanentes, o *salário pensionável* corresponde ao salário à idade normal de reforma, e o *serviço pensionável* é o número de anos de serviço desde a data de admissão.

Para o plano em análise apenas se considera o *benefício de reforma*, onde a *Idade Normal de Reforma* (INR) corresponde aos 65 anos de idade, e a *fórmula de benefício* corresponde a 10% do seu salário à INR.

Como pressupostos demográficos tem-se a tabela de mortalidade TV73/77, que continua a ser a mais utilizada, para cálculo da mortalidade dos participantes e a de invalidez EVK80, que se apresentam no anexo 1. De notar que a metodologia apresentada para dois decrementos é facilmente adaptada para mais decrementos.

Os pressupostos financeiros tomados na presente avaliação actuarial para determinação de responsabilidades são as seguintes:

- Taxa de desconto – 5%, encontrando-se dentro do intervalo [5%; 5,5%] para os activos e para os beneficiários [4; 5]%;
- Taxa de crescimento salarial – 3%, estando no intervalo [2,5%;3%] , o intervalo mais usado nas avaliações;
- Inflação – 2%
- Crescimento de pensões – 3%

Sendo estas taxas anuais e constantes ao longo do período de avaliação.

5.2.Método Actuarial

O método de avaliação utilizado na avaliação do grupo de participantes é o *Projected Unit Credit* como foi referido no final da secção 4.1.

Após a descrição do método, benefícios e pressupostos a aplicar procede-se à análise de população considerada na aplicação prática.

5.3.Estatística da população

O conjunto de dados diz respeito a uma base de dados de uma população fictícia. A população analisada possui as seguintes estatísticas:

ACTIVOS

31-12-2007

Número	215
Média salário mensal	1.773 u.m.
Idade média	37,72
Tempo de serviço passado médio	7,44
Tempo de serviço futuro médio	27,80

Tabela 3 – Estatística de participantes activos.

PENSIONISTAS

31-12-2007

Número	121
Média salário mensal	399 u.m.
Idade média	68,62
Tempo de serviço passado médio	40,00

Tabela 4 – Estatística de participantes inactivos.

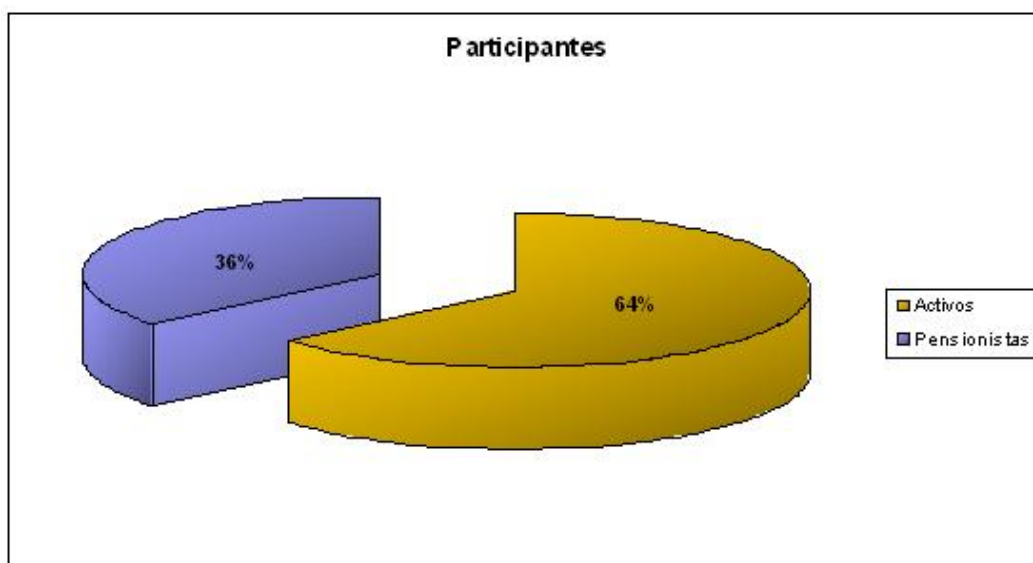


Figura 11 – População em análise.

Tal como o gráfico ilustra, grande parte, cerca de 2/3, da população é activa.

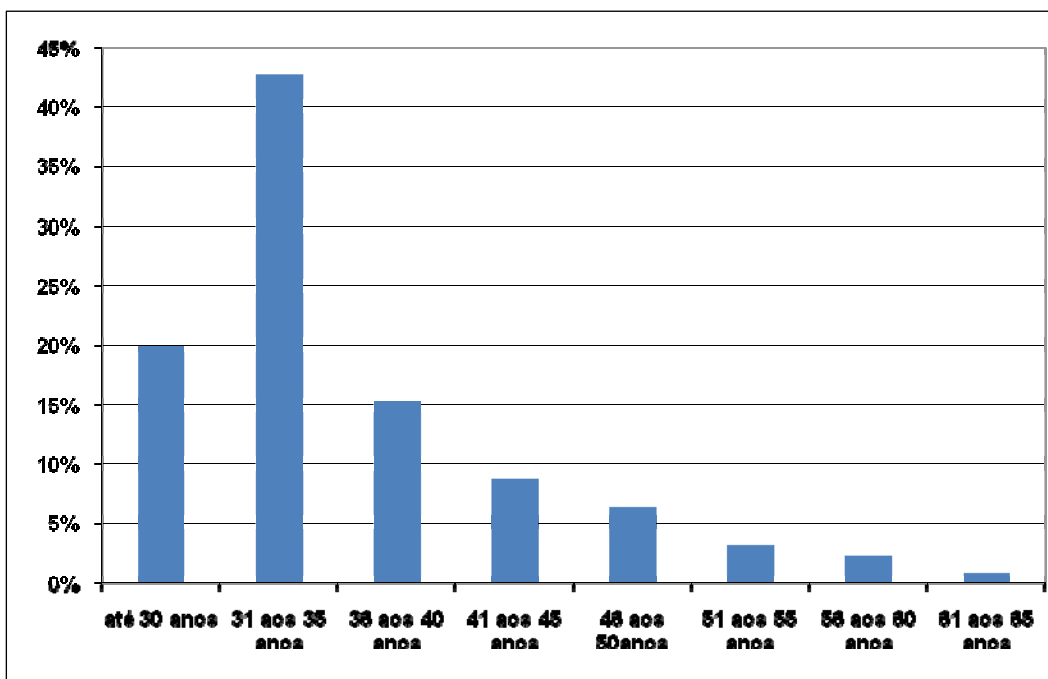


Figura 12 – Percentagem de activos por idade.

A maior percentagem de activos da população analisada encontra-se no intervalo de idades dos 31 aos 35 anos, cerca de 43%.

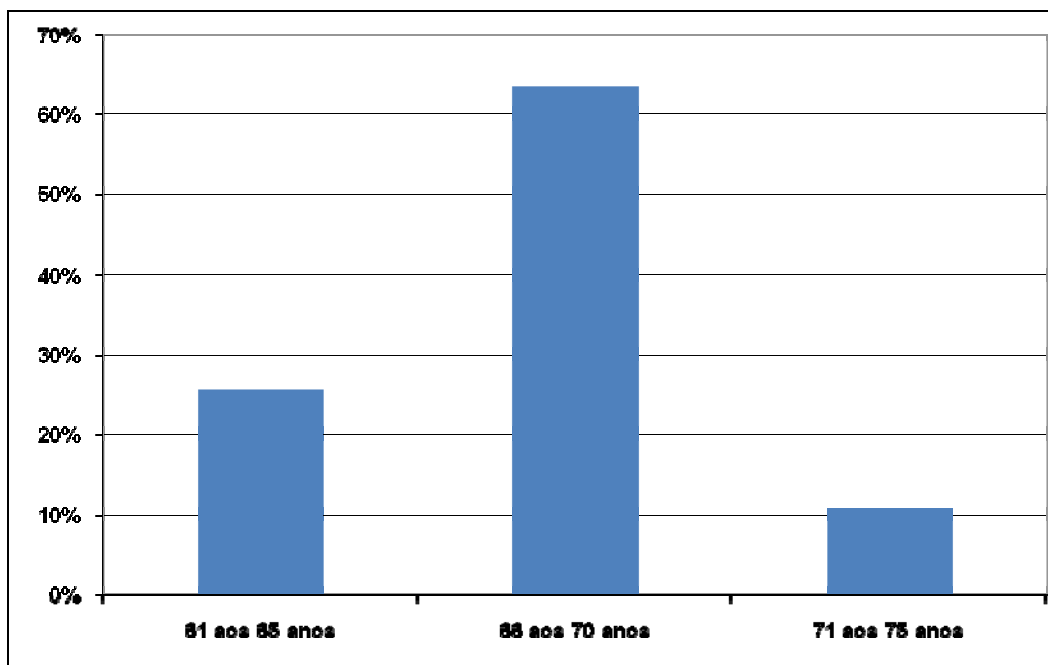


Figura 13 – Percentagem de inactivos por idade.

A maioria dos pensionistas, 88%, encontra-se entre os 65 e 70 anos.

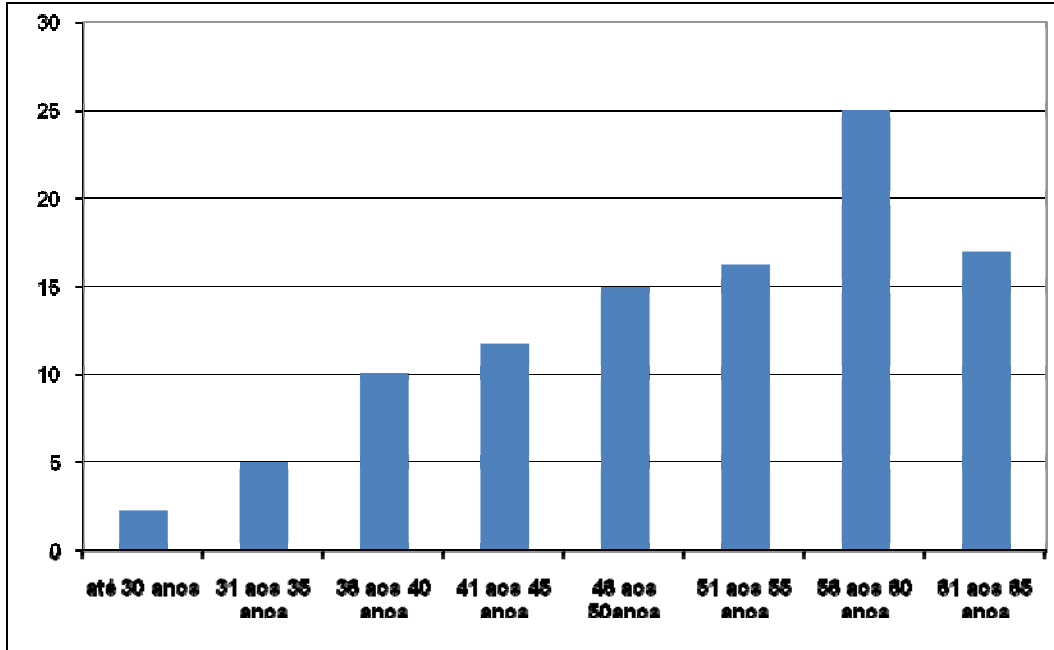


Figura 14 – Média de serviço passado para participantes activos.

Os participantes activos com mais tempo de serviço, 25 anos, encontram-se no intervalo [56, 60] anos, e os que possuem menos anos de serviço, foi quem entrou para o plano mais recentemente, participantes até 30 anos.

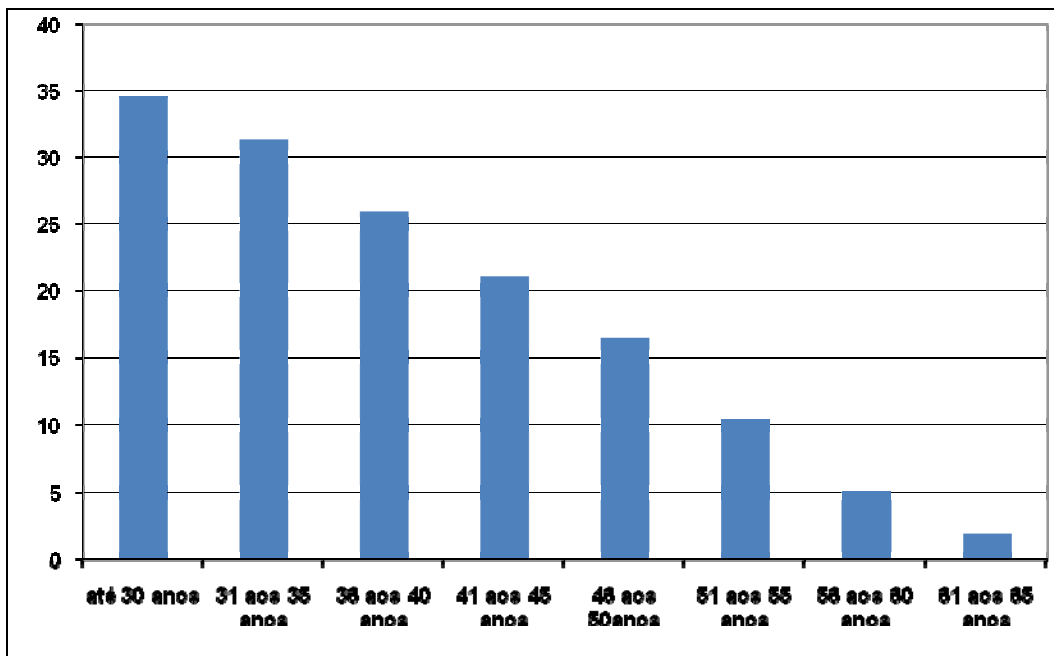


Figura 15 – Média de futuro serviço para participantes activos.

Como é visível, à medida que a idade do participante aumenta, o tempo de serviço futuro diminui, como é de esperar.

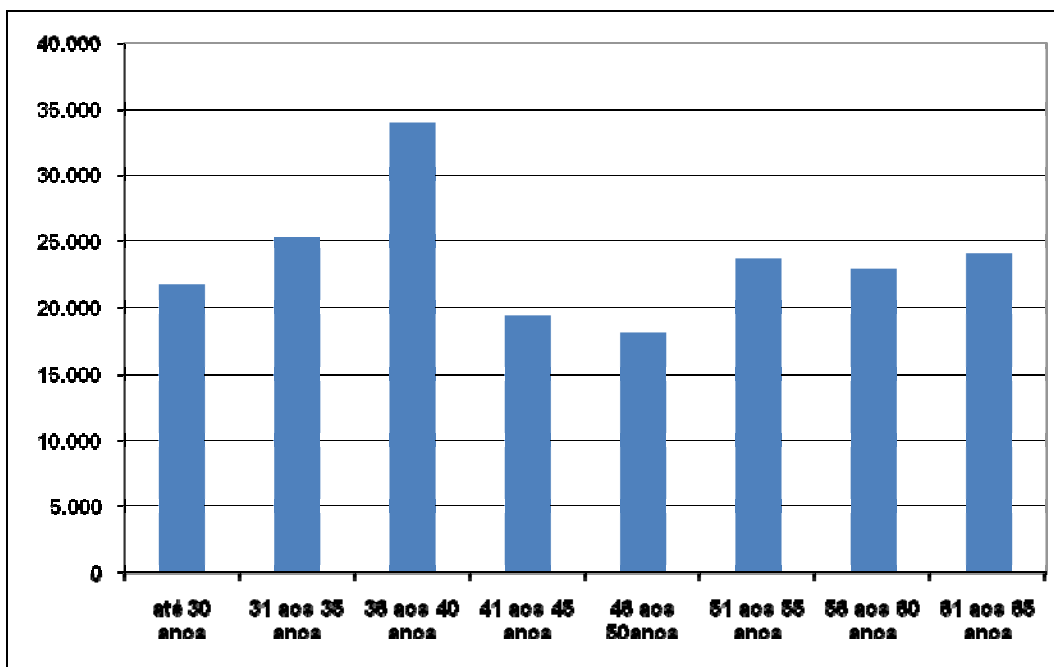


Figura 16 – Média salarial dos participantes activos.

A média salarial na INR dos activos na idade actual regista-se nas 34.000 u.m. anualmente e no intervalo de idades 36 e 40 anos.

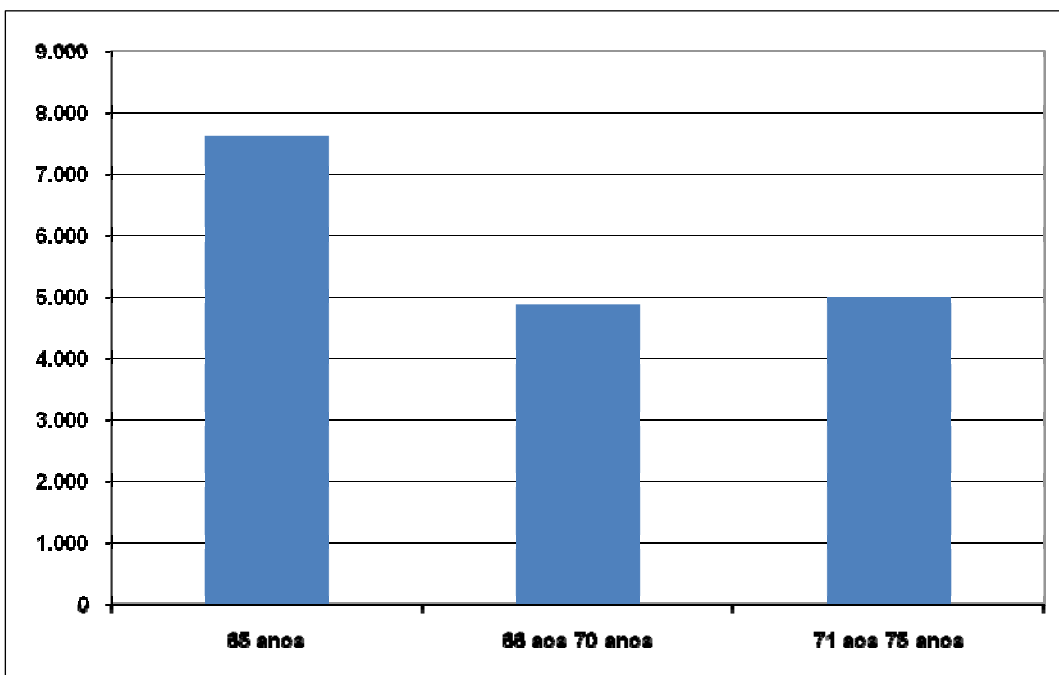


Figura 17 – Pensão média de participantes pensionistas.

A pensão média dos pensionistas regista-se nos 5.800 u.m. anualmente à data de avaliação.

De seguida apresentamos a metodologia utilizada para apurar o impacto da utilização de uma tábua de mortalidade dinâmica.

5.4. Tabelas de Decrementos

Determine-se agora a tabela líquida considerando os decrementos de morte e de invalidez.

Tendo-se l_x como modo de representar o número esperado de sobreviventes para a idade x de l_0 nascimentos (100.000 por instância) para a mortalidade (TV73/77) e para a invalidez (EVK80).

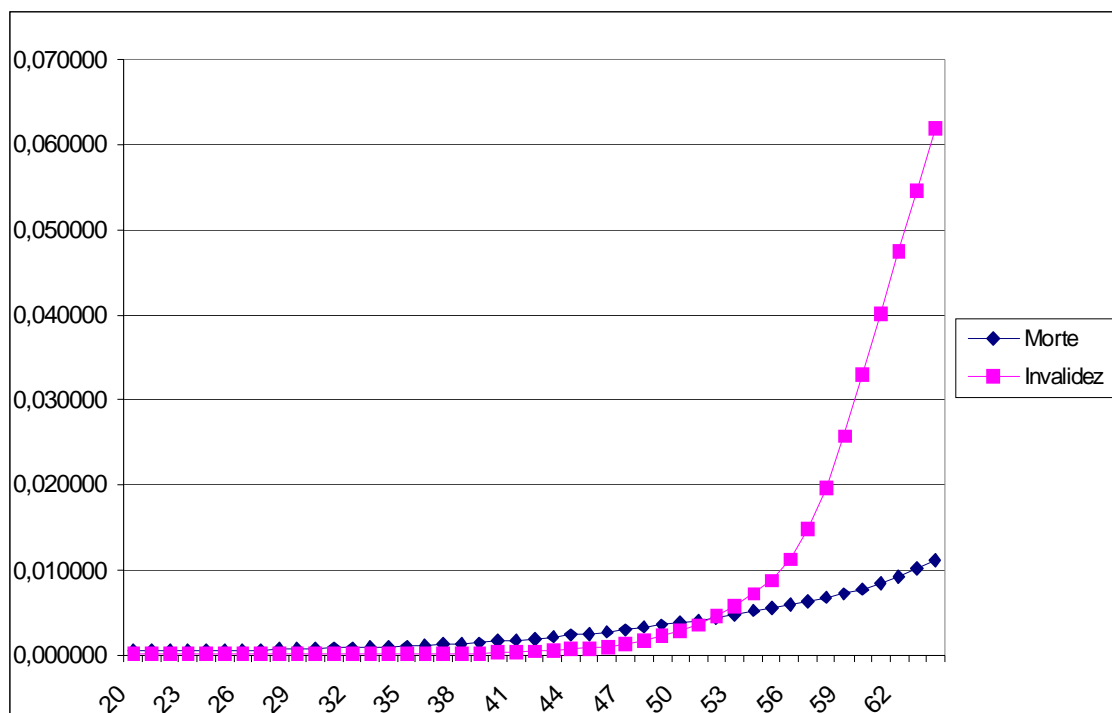


Figura 18 – Desenvolvimento de taxas unidécimo de morte e de invalidez.

De seguida calcula-se as taxas unidécimo através da fórmula $1 - \frac{l_{x+1}}{l_x}$, como se visualiza na .

A partir dos 50 anos de idade a invalidez começa a ter um maior impacto. De notar que a partir dos 65 anos (INR) já não se considera o decréscimo invalidez, pois os participantes já são inativos e por isso só se aplica o decréscimo mortalidade.

	TV73_77	EVK80	Morte	Invalidez
Idade	l(x)	l(x)	q'(x)	i'(x)
34	97.120,00	99.848,11	0,000978	0,000180
35	97.025,00	99.830,13	0,001062	0,000200
36	96.922,00	99.810,17	0,001135	0,000220
...
63	86.862,00	78.617,12	0,010189	0,054660
64	85.977,00	74.319,91	0,011189	0,061920
65	85.015,00	69.718,02	0,012339	0,000000

Tabela 5 – Tabela de mortalidade e invalidez e respectivas taxas unidecremento.

Veja-se o seguinte exemplo para o unidecremento morte:

$$q'_{morte}(34) = \left(1 - \frac{l_{35}}{l_{34}}\right) \cdot 1 = \left(1 - \frac{97025}{97120}\right) \cdot 1 = 0,000978$$

E para o unidecremento invalidez:

$$i'_{invalidez}(34) = \left(1 - \frac{ekv80_{35}}{ekv80_{34}}\right) \cdot 1 \cdot if(34 < 65; 1; 0) = \left(1 - \frac{99830,11}{99848,11}\right) \cdot 1 \cdot 1 = 0,000180$$

Posteriormente calcula-se a probabilidade multidecremento, tendo por base a fórmula 4:

$$q^{(1)} = q^{(1)} \prod_2^n \left(1 - \frac{1}{2} * q^{(n)}\right)$$

	Morte	Invalidez
Idade	q(x)	q(x)
34	0,000978	0,000180
35	0,001061	0,000200
36	0,001135	0,000220
...
63	0,009910	0,054382
64	0,010843	0,061574
65	0,012339	0,000000

Tabela 6 – Tabela de probabilidade morte e invalidez em ambiente de multidecremento.

Veja-se o seguinte exemplo para a morte em ambiente multidecremento

$$q_{morte}(34) = q'_{morte}(34) \cdot (1 - 0,5 \cdot q'_{invalidez}(34)) = 0,000978 \cdot (1 - 0,5 \cdot 0,000180) = 0,000978$$

E para a invalidez em ambiente multidecremento:

$$q_{\text{invalidez}}(34) = q'_{\text{invalidez}}(34) \cdot (1 - 0,5 \cdot q'_{\text{morte}}(34)) = 0,000180 \cdot (1 - 0,5 \cdot 0,000978) = 0,000180$$

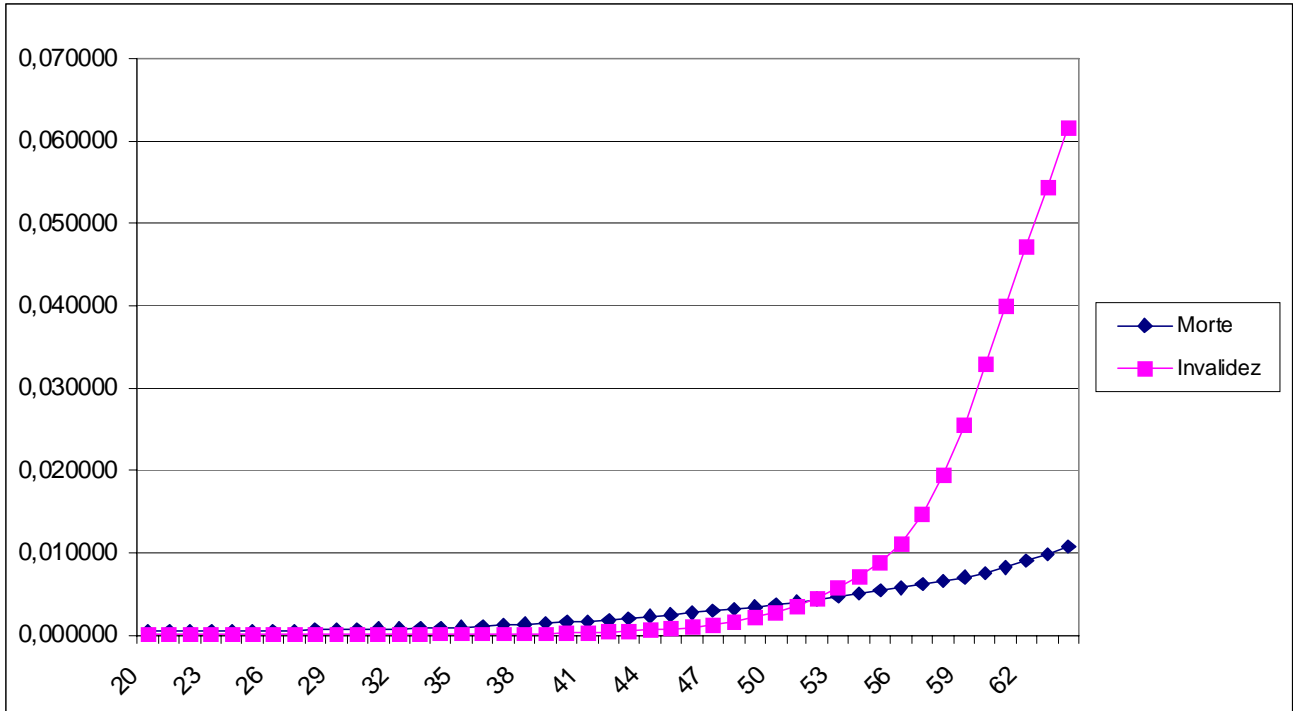


Figura 19 – Desenvolvimento da probabilidade morte e invalidez em ambiente de multidecremento.

Tal como na , verifica-se que a partir dos 50 anos de idade a invalidez continua a ter um maior impacto.

Tendo-se por fim a tabela líquida, onde os q_x se calculam através da fórmula 4 :

Idade	$q^T(x)$	$p^T(x)$	$l(x)$ líquido
28	0,000776	0,999224	97.496,97
29	0,000818	0,999182	97.421,28
...
62	0,056232	0,943768	72.357,23
63	0,064292	0,935708	68.288,40
64	0,072416	0,927584	63.898,03
65	0,012339	0,987661	59.270,77

Tabela 7 – Tabela Líquida.

Veja-se o seguinte exemplo:

$$q^T(34) = q_{morte}(34) + q_{invalidez}(34) = 0,000978 + 0,000180 = 0,001158$$

$$p^T(34) = 1 - q(34) = 0,998842$$

$$l_{34}^{liquido} = l_{33}^{liquido} \cdot p(33) = 97075,88 \cdot 0,998935 = 96972,48$$

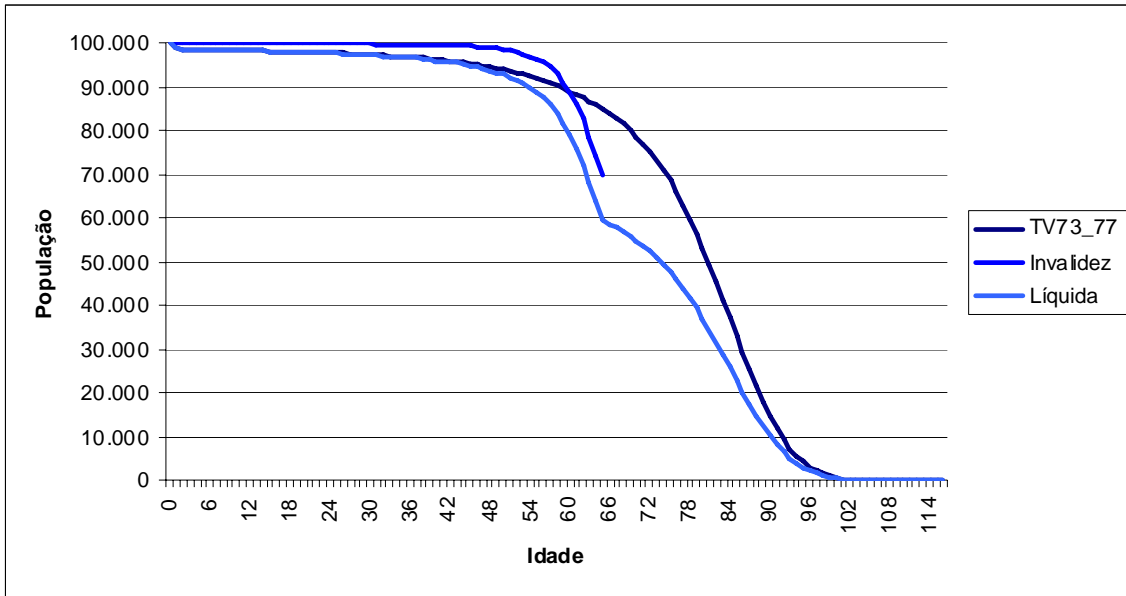


Figura 20 – Comparação entre l_x líquido com o decremento morte e invalidez, l_x de mortalidade e invalidez.

Como se observa, a invalidez começa a ter maior impacto a partir dos 48-50 anos de idade, onde o número de indivíduos com esta idade começa a diminuir até aos 65 anos, e a partir daí a linha começa a tomar a forma de l_x para o decremento mortalidade.

5.5. Estimativa de parâmetros de Lei de Gompertz

Optou-se pelo modelo de Gompertz por ser de fácil aplicação para mensurar o impacto do aumento da esperança de vida nas responsabilidades do fundo. A metodologia apresentada pode ser adaptada a outros modelos de mortalidade.

5.5.1. Estimativa de parâmetros de Lei de Gompertz para Tabela de Mortalidade TV73/77

Para se utilizar o modelo contínuo de cálculo de probabilidades de sobrevivência é necessário determinar os parâmetros B e C da Lei de Gompertz.

O primeiro passo é o cálculo da força de mortalidade $\mu_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x}$ (Fórmula 1) e a sua transformação numa regressão linear $y = \log \mu_x$ (Fórmula 15)

Parametrizando numa regressão linear do modo $y=mx+d$ obtém-se m igual a 0,03381 e d igual a -3,9546, com coeficiente de correlação entre o l_x exacto e o l_x estimado de 0,99427.

Pela fórmula $\mu_x = BC^x$ e pela tem-se:

$$B = 10^d \Rightarrow B = 0.000111$$

$$C = 10^m \Rightarrow C = 1.0809662$$

Pode-se comparar o modelo discreto (l_x exacto) com o modelo contínuo (l_x estimado) na figura seguinte:

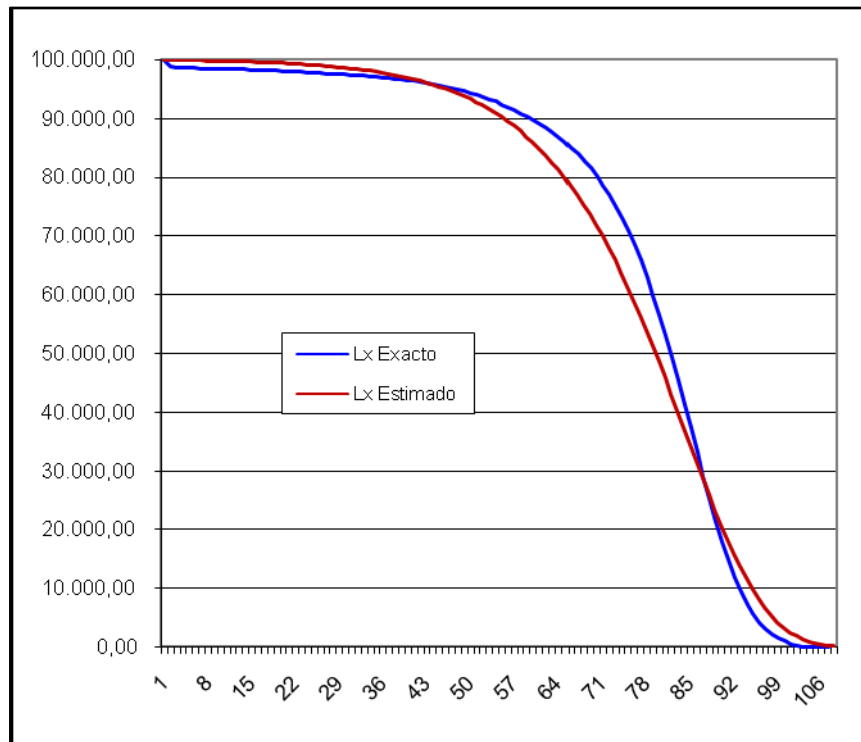


Figura 21 – Gráfico de relação entre l_x exacto e l_x estimado do decremento mortalidade.

Como se pode observar o l_x estimado é menor que o l_x exacto, no intervalo entre 43 e os 90 anos, devido à uniformização da força de mortalidade.

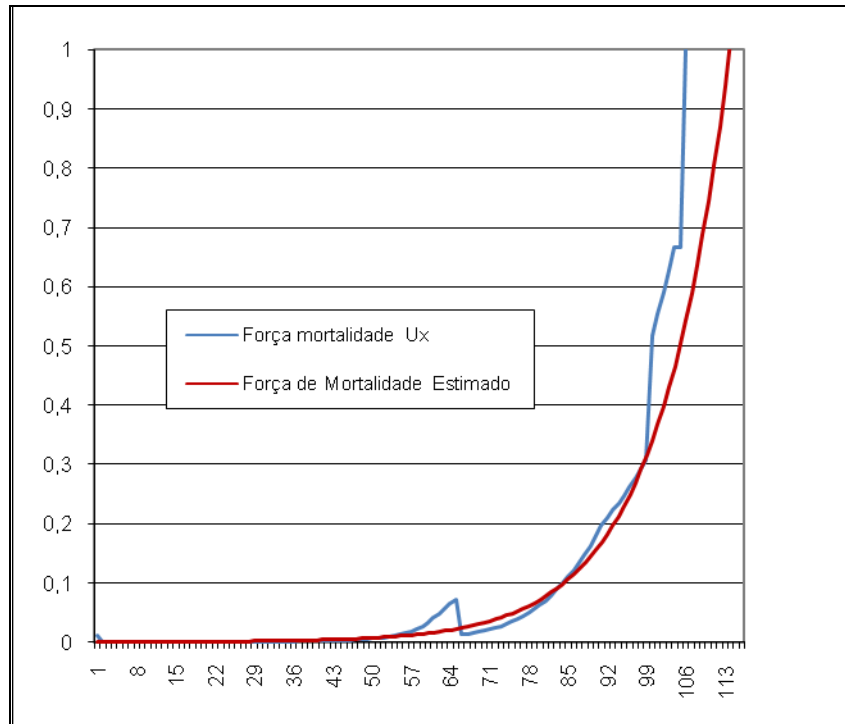


Figura 22 – Gráfico de relação entre força de mortalidade exacta e estimada.

Como é bem visível na figura acima apresentada a força de mortalidade, do modelo discreto, com o decremento morte é mais irregular do que com o modelo estimado, modelo contínuo, devido à parametrização efectuada ao modelo discreto.

5.5.2. Estimativa de parâmetros de Lei de Gompertz para Tabela líquida de Mortalidade e Invalidez

Para os participantes activos aplica-se o decremento morte e invalidez, sendo por isso necessário ajustar os parâmetros de lei de Gompertz para a tabela líquida.

À semelhança do cálculo de parâmetros de mortalidade, a primeira etapa é o cálculo da força de mortalidade $\mu_x^T = 1 - \frac{l_{x+1}^T}{l_x^T}$ (Fórmula 1) e transformação numa regressão linear $y = \log \mu_x^T$ (Fórmula 15). Observe-se na tabela 8 um extracto dos resultados obtidos.

Idade x	q_x^T	$l_x \sim T$ líquida	μ_x^T	$\log(\mu_x^T)$
34	0,0011	97076	0,0010651	-2,972597197
35	0,0012	96972	0,001158	-2,93629323
36	0,0013	96860	0,0012614	-2,899157577
37	0,0014	96738	0,0013547	-2,868162154
38	0,0015	96607	0,0014895	-2,826946332

39	0,0016	96463	0,0016041	-2,794757858
40	0,0018	96308	0,0017502	-2,756921939

Tabela 8 – Tabela de probabilidade da tábua líquida e μ_x^T .

Veja-se o seguinte exemplo para cálculo de μ_x^T de e da função logaritmo da mesma:

$$\mu_{34}^T = 1 - \frac{l_{35}^{\text{liquido}}}{l_{34}^{\text{liquido}}} = \frac{96972}{97076} = 0,0010651$$

$$\log(\mu_{34}^T) = \log(0,0010651) = -2,72597197$$

Parametrizando numa regressão linear do modo $y=mx+d$ obtém-se m igual a 0,03385 e d igual a -3,8567 na origem de y . O coeficiente de correlação entre o l_x exacto e o l_x estimado é de 0,99615.

Pela fórmula $\mu_x^T = B^*C^{*x}$ (pela Fórmula 10) e (Fórmula 15) :

$$B^* = 10^d \Rightarrow B^* = 0.0001391$$

$$C^* = 10^m \Rightarrow C^* = 1.0810637$$

Tendo-se por isso um número de indivíduos com idade x estimado como se apresenta de seguida em comparação com o exacto da tabela líquida:

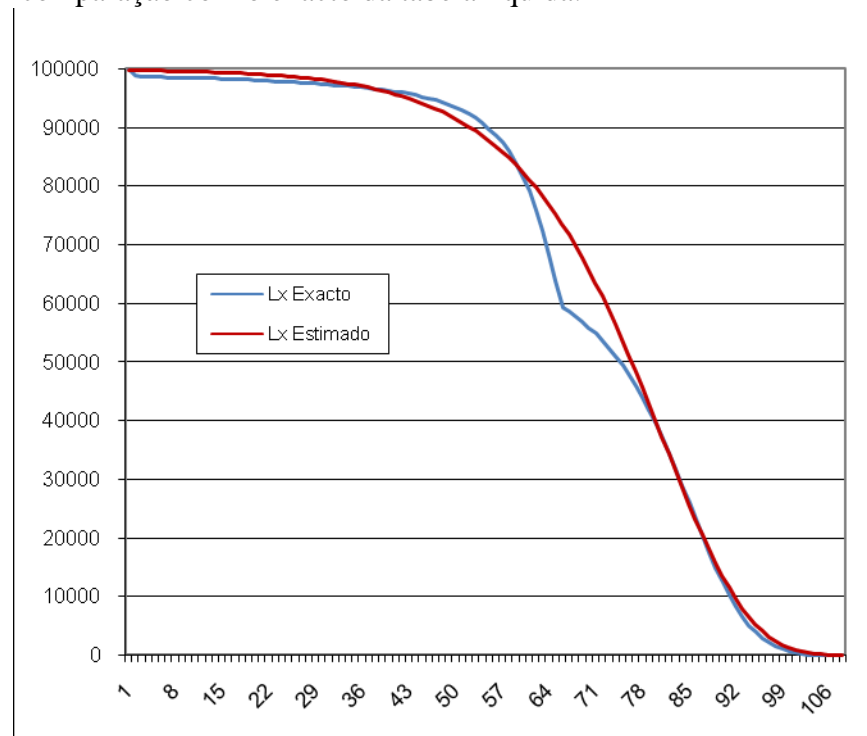


Figura 23 – Gráfico de relação entre l_x exacto e l_x estimado considerando a tábua líquida.

Como se observa no gráfico apresentado, a aproximação efectuada subavalia o efeito da invalidez entre os 55 e 65 anos. Efeito este que é, usualmente, muito pronunciado nestas idades, onde as tabelas de invalidez apresentam probabilidades superiores à mortalidade. Como tal o modelo que se propõe usar neste trabalho, por ser um modelo contínuo permite prosseguir os objectivos propostos. No entanto, não será o mais adequado para usar em avaliações reais, pois irá subestimar os custos de invalidez.

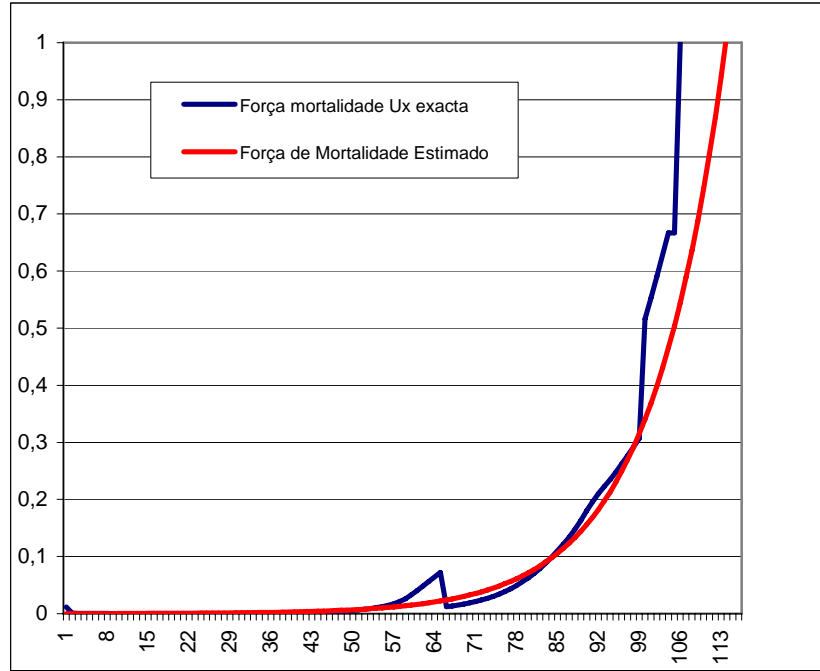


Figura 24 – Relação entre a força de mortalidade, μ_x^T , exacta e estimada.

Como é bem visível na figura acima apresentada μ_x^T com o decremento de invalidez e morte é mais irregular que o modelo aproximado, cujo objectivo é o ser linear, observando-se isso mesmo, existe uma linha mais uniforme. Tal como na , μ_x^T com decremento de invalidez e de morte é mais irregular que o modelo aproximado.

Tendo como base μ_x^T consegue calcular-se a probabilidade de sobrevivência de um participante de idade x:

$$\begin{aligned}
 \mu_x^T &= B \cdot C^{x^*} \\
 {}_tP_x &= S_x(x) = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}^T ds\right) = \\
 &= \exp\left(-\int_0^t B \cdot C^{x+s^*} ds\right) = \exp\left(-B \cdot C^{x^*} \int_0^t C^{s^*} ds\right) = \quad (22) \\
 &= \exp\left(-B \cdot C^{x^*} \left[\frac{C^{s^*}}{\log(C^{*})}\right]_0^t\right) = \exp\left(-B \cdot C^{x^*} \cdot \frac{(C^{t^*} - 1)}{\log(C^{*})}\right)
 \end{aligned}$$

5.5.3. Esperança Média de Vida

As tabelas de mortalidade e de invalidez têm vindo a evoluir no decorrer do tempo, pois a esperança média de vida tem evoluído. No entanto, ainda são estáticas quando se pretende avaliar probabilidades de sobrevivência a longo termo, como é o caso dos Planos de Pensões. Neste sentido, ir-se-á projectar a esperança de vida para um dado período, tendo em consideração o decréscimo de morte e de invalidez, bem como o uso do modelo contínuo.

A esperança de vida é a dada pelo somatório de probabilidade de vida obtida através de $\mu^x = BC^x$ desde a idade 0 até à idade 106, no caso em estudo.

Veja-se o seguinte exemplo prático do cálculo de esperança média de vida através do modelo contínuo, com o decréscimo mortalidade, para um participante de idade 35, e pela fórmula 2 e fórmula 16 :

$$e_{35} = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_{35} = \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left(- \int_0^t \mu_{35+s} ds \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left\{ - \frac{B}{\log C} C^x (C^t - 1) \right\} = 42,45013$$

E de seguida o cálculo da esperança média de vida, através do modelo discreto, com o uso da tabela de mortalidade TV73/77:

$$e_{35} = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_{35} = 39,67862$$

A esperança média de vida calculada através da força de mortalidade com os parâmetros B e C estimados, ou seja como modelo contínuo, é mais elevada do que com o modelo discreto. Ou seja com o modelo contínuo obtém-se uma esperança de vida mais elevada do que com o modelo discreto, devendo-se tal facto à parametrização efectuada para B e C.

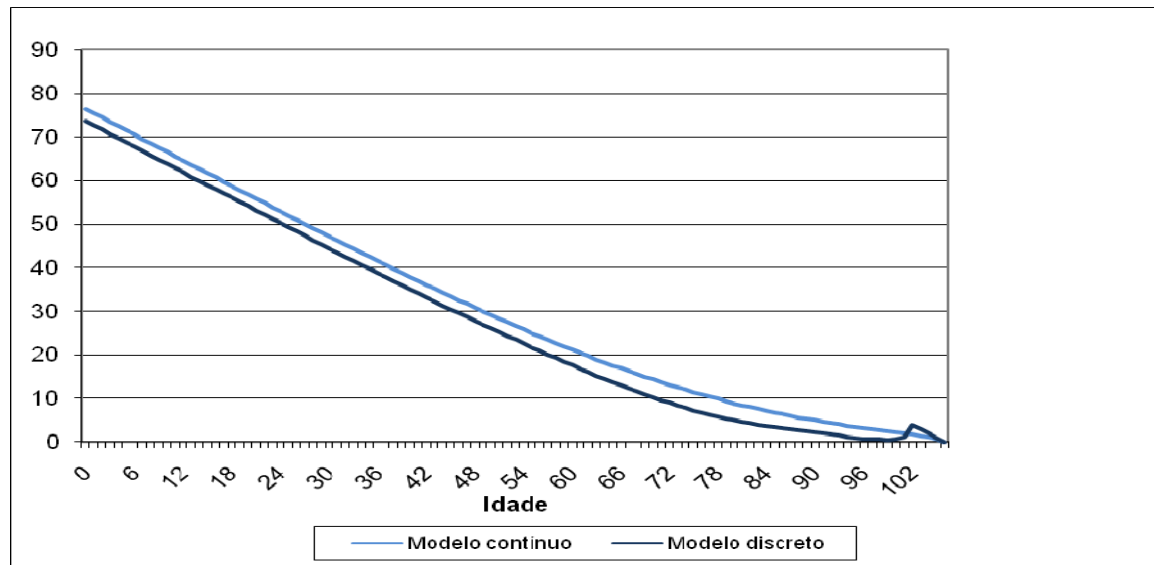


Figura 25 – Comparação de esperança de vida calculada através de força de mortalidade, modelo contínuo, e da tabela de mortalidade, modelo discreto.

O modelo aproximado agrava um pouco a força de mortalidade relativamente à real usando somente o decremento de morte.

Fazendo o mesmo mas agora com a tabela líquida, ou seja com o decremento de mortalidade e de invalidez, tem-se para a mesma idade os seguintes valores (fórmula 2 e fórmula 15) :

$$e_{35}^T = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_{35}^T = \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\int_0^t \mu_{35+s}^T ds\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-B^* \cdot C^{*x} \cdot \frac{(C^{*t} - 1)}{\log(C^*)}\right) = 39,7194$$

De seguida calcula-se a esperança de vida utilizando a tabela líquida multidecremento, com os decrementos morte e invalidez.

$$e_{35} = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_{35} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{l_{35+k}}{l_{35+k-1}}\right) = 37,5688$$

Graficamente tem-se:

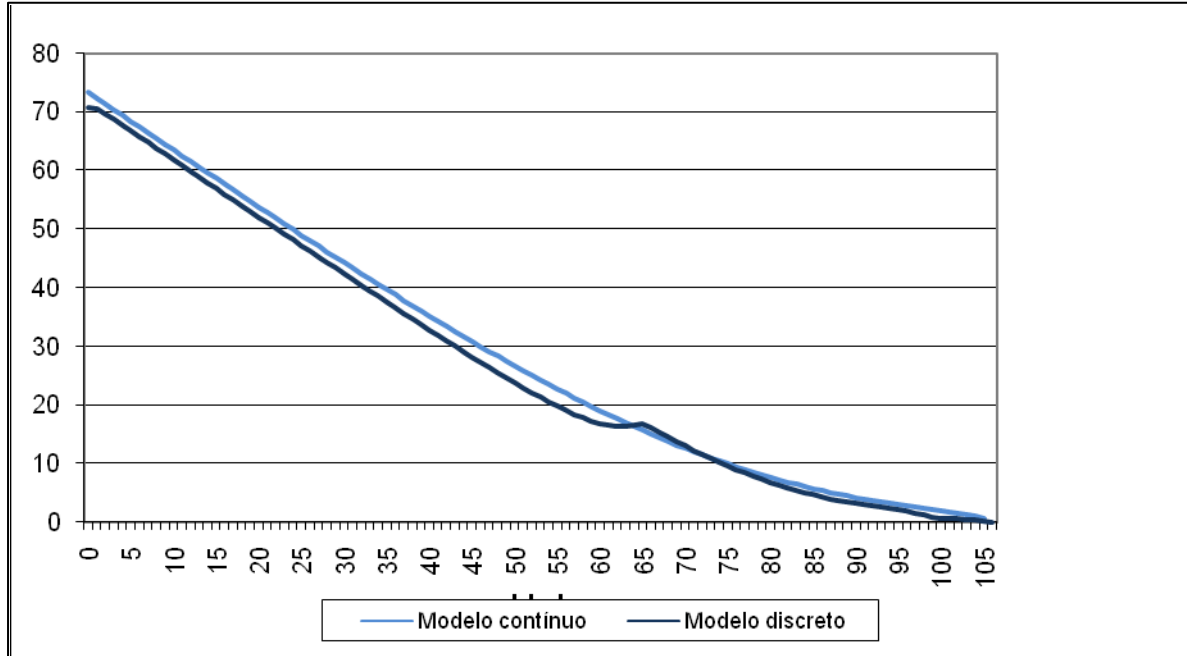


Figura 26 – Comparação de esperança de vida calculada através de μ_x^T e da tabela líquida com os decrementos de mortalidade e de invalidez.

Como é de esperar utilizando μ_x^T a linha é mais alisada do que utilizando a tabela líquida com o modelo discreto.

5.6.O Modelo Proposto

Agora introduz-se no modelo $\mu_x^T = B \cdot C \cdot x$ o aumento da esperança média de vida. Esta alteração ao modelo é importante no sentido de se mensurar probabilidades de sobrevivência a longo termo que contemplem um aumento da esperança média de vida, tornando assim o modelo mais adaptado à realidade.

Deste modo, a esperança média de vida, é função não só da idade, mas também do instante no tempo onde é considerada. Assim, um individuo (x), terá uma esperança média de vida e_x no instante 0 e uma esperança média de vida no instante t $e_x(t) \geq e_x(0) = e_x$ superior à anterior. Consequindo-se introduzir no modelo o impacto da evolução da esperança média de vida.

Dado o aumento de esperança de vida e a diminuição de mortalidade procurou-se uma função multiplicativa que representasse isso mesmo.

$$\mu_x^T = B \cdot C \cdot x D^{x \cdot g(t)}$$

Tomando-se a força de mortalidade apresentada acima, torna-se necessário encontrar uma função de modo a controlar o crescimento de esperança de vida até ao fim da vida do participante/beneficiário, seja $g(t)$ essa função:

$$g_{\delta \in]0,1[}(t) : g(0) = 0 \wedge g(+\infty) = 1$$

Com

$$\delta = \begin{cases} \frac{t}{\theta}; & \text{se } t < \theta \\ 1; & \text{se } t \geq \theta \end{cases}$$

onde, os parâmetros D , θ e δ se determinam de modo a que a esperança média de vida de um individuo de 65 anos daqui a 20 anos seja aproximadamente mais 2 anos do que esperança média de vida de um individuo de 65 anos hoje¹⁰.

Assim, no modelo contínuo, com aumento de esperança média de vida e com decrementos de morte e invalidez teremos:

$$\mu_x^T = \begin{cases} B \cdot C \cdot x D^{x(t/\theta)}; & \text{se } t > \theta \\ B \cdot C \cdot x D^x & ; \text{se } t \leq \theta \end{cases}$$

E a seguinte função de sobrevivência:

$${}_n p_x^{(t)} = \exp\left(-\int_0^n B \cdot C \cdot (x+k) D^{(x+k) \cdot \delta} dk\right)$$

¹⁰ Estes valores estão de acordo com as projecções que constam no Relatório técnico sobre sustentabilidade da Segurança Social (Segurança Social, Maio 2006).

Calculando a primitiva de $B \cdot C^{\bullet(x+k)} D^{(x+k),\delta}$ obtém-se,

$${}_n p_x^{(t)} = \exp\left(-\frac{B \cdot C^{\bullet x} D^{\delta x}}{\log(C \cdot D^{\delta})} (C^{\bullet n} D^{\delta n} - 1)\right)$$

Considere-se para o estudo em causa o passar de um período de 20 anos, e um θ de 30 (que funciona como um tempo máximo de aumento da esperança de vida), obtendo-se um D de 0,997.

Obtendo-se as seguintes variações apresentadas graficamente na esperança de vida:

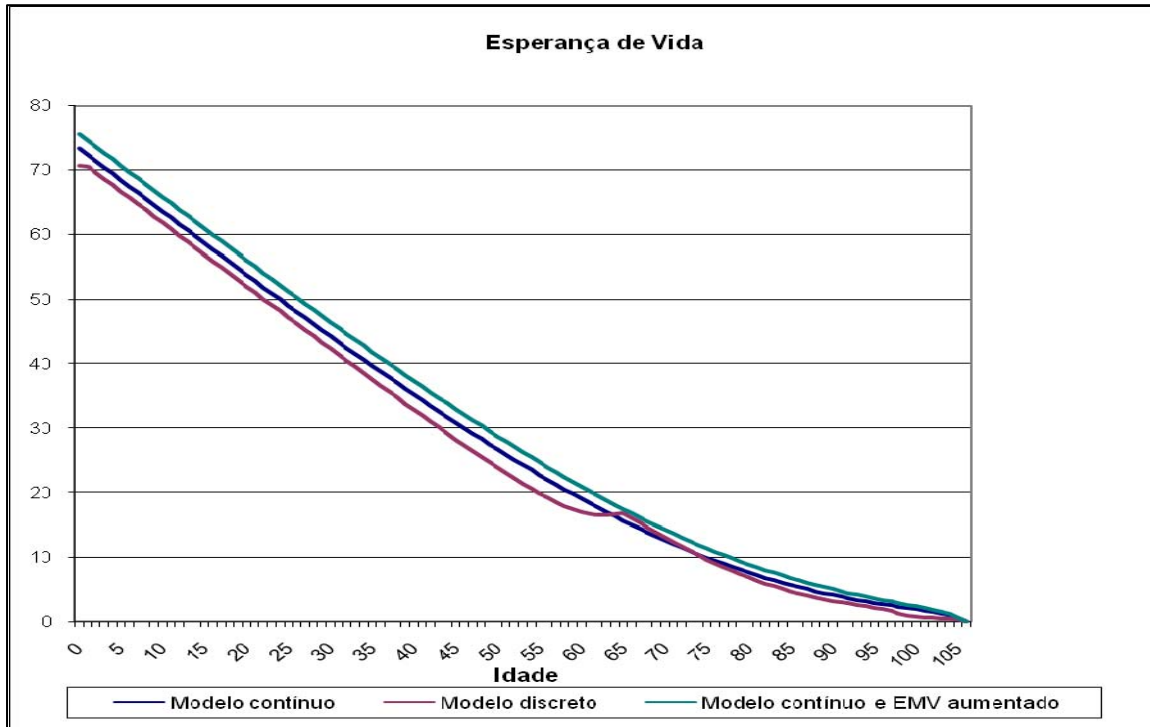


Figura 27 – Comparação de esperança de vida.

A linha lilás (tábua líquida, modelo discreto), mostra o impacto da invalidez até aos 65 anos. A linha azul (tábua líquida, modelo contínuo), está abaixo da linha verde (tábua líquida, modelo contínuo, esperança de vida aumentada) como seria de esperar.

6. Resultados e aplicação prática

Tendo por base a análise efectuada ir-se-á aplicar as tábuas líquidas à população em estudo de modo a calcular a responsabilidade actuarial, o VABT (valor actual dos benefícios) e o CN (custo normal), sendo este último somente aplicado aos participantes activos.

Tendo por base o ficheiro de população fictícia que deu origem às estatísticas apresentadas na secção 0 iniciou-se o processo de avaliação. Calculou-se a idade actuarial do participante na data de avaliação; o seu estado, se activo ou inactivo (mais de 65 anos de idade), consoante as regras do Plano de Pensões; o tempo de serviço passado (TSP), futuro (TSF) e total (TST) através da idade de admissão e a data de avaliação; projectou-se o salário até à INR, tendo por base o tempo de serviço futuro (TSF) e o seu crescimento salarial.

No caso de o participante ser inactivo, o valor do salário à INR corresponde à pensão actual. Para os activos a pensão à INR corresponde a 10% do salário à INR.

O associar da probabilidade de vida até à INR, tendo por base tábua líquida obtida à conta da tábua de mortalidade e de invalidez, respectivamente, TV73-77 e EVK-80 foi o passo seguinte. O cálculo da probabilidade de sobrevivência foi realizado recorrendo-se primariamente ao modelo discreto usual, de seguida recorrendo-se ao modelo contínuo e por fim recorrendo-se ao modelo contínuo mas já com o aumento de esperança de vida.

Tendo estes resultados tornou-se possível calcular as responsabilidades dos participantes activos e inactivos.

Para os participantes activos calculou-se o VABT e o CN do mesmo tendo por base as fórmulas 20 e 21 apresentadas no Capítulo 4. Para os participantes inactivos o custo normal é nulo para este grupo, devido a já não se encontrarem no activo. E o valor actual dos benefícios corresponde ao valor actual das pensões em pagamento, ou seja VAPP.

O impacto do modelo desenvolvido ocorre na probabilidade de permanência do indivíduo na empresa ${}_{TSF}p_x^*$ (Fórmula 23) e na renda vitalícia a_{INR}^* (Fórmula 24), nos activos e na renda vitalícia nos beneficiários.

$${}_{TSF}p_x^* = {}_{TSF}p_x^{(t)} = \frac{l_{x+1}^{(0)}}{l_x^{(0)}} \cdot \frac{l_{x+2}^{(1)}}{l_{x+1}^{(1)}} \cdot \frac{l_{x+3}^{(2)}}{l_{x+2}^{(2)}} \dots = \prod_{k=0}^{TSF} p_{x+k}^{(k)} = \prod_{k=0}^{TSF} \exp\left(-\frac{B \cdot C^{\bullet(x+k)} D^{\delta(k)(x+k)}}{\log(C^{\bullet} D^{\delta(k)})} \cdot (C^{\bullet} D^{\delta(k)} - 1)\right) \quad (23)$$

$$\begin{aligned} a_{INR}^* &= a_{INR}^{(14)(t)} = v p_{INR}^{(TSF)} + v^2 p_{INR}^{(TSF)} p_{INR+1}^{(TSF+1)} + v^3 p_{INR}^{(TSF)} p_{INR+1}^{(TSF+1)} p_{INR+2}^{(TSF+2)} + \dots = \\ &= \sum_{k=1}^{w-INR} v^k \prod_{j=0}^{k-1} p_{INR+j}^{TSF+j} + \frac{15}{24} = \sum_{k=1}^{w-INR} v^k \prod_{j=0}^{k-1} \exp\left(-\frac{B \cdot C^{\bullet(INR+j)} D^{\delta(j+TSF)(INR+j)}}{\log(C^{\bullet} D^{\delta(j+TSF)})} \cdot (C^{\bullet} D^{\delta(j+TSF)} - 1)\right) + \frac{15}{24} \end{aligned} \quad (24)$$

Assim no modelo contínuo com esperança média de vida tem-se:

$$VABT = \sum_{k=1}^N B_k * \frac{1}{r(TSF_k)} TSF_k P_x^* * a_{INR}^* \quad (17)$$

$$VAPP = \sum_{k=1}^{Nr} P_k . a_{x_k}^* \quad (18)$$

Neste sentido obteve-se a seguinte variação dos VABT, CN e VAPP com o modelo discreto, o modelo contínuo e modelo contínuo com aumento da esperança de vida:

VABT		
<i>Modelo Discreto</i>	<i>Modelo contínuo</i>	<i>Modelo Contínuo com esperança de vida</i>
3.811.693,73	5.054.295,60	5.712.826,47

Tabela 9 – Comparação do Valor Actual dos Benefícios Totais dos Activos com os diferentes modelos.

CN		
<i>Modelo Discreto</i>	<i>Modelo contínuo</i>	<i>Modelo Contínuo com esperança de vida</i>
110.020,93	145.737,63	164.436,70

Tabela 10 – Comparação do Custo Normal com os diferentes modelos.

VAPP		
<i>Modelo Discreto</i>	<i>Modelo contínuo</i>	<i>Modelo Contínuo com esperança de vida</i>
7.102.067,42	7.485.162,12	7.857.922,25

Tabela 11 – Comparação do Valor Actual das Pensões em Pagamento com os diferentes modelos.

No entanto, o objectivo do trabalho não é mensurar este crescimento mas sim o impacto do aumento da esperança de vida, o que é possível comparando o modelo contínuo com o modelo contínuo com esperança de vida. Esse impacto no caso em estudo é de 13%.

A variação no CN é análoga.

No VAPP existe uma variação de 5% entre o modelo discreto e contínuo, e 11% relativamente ao modelo contínuo com esperança de vida. A variação entre o contínuo e o contínuo com esperança de vida é de 5%.

A variação entre o modelo discreto e o modelo contínuo é explicada pela ajustamento realizado como se pode verificar pela e pela . A variação positiva entre o modelo contínuo e o modelo contínuo com esperança de vida é expectável, pois aumentando a esperança de vida a probabilidade de um participante chegar à INR aumenta e aumenta também o número de pensões que irá receber enquanto beneficiário. A mais valia deste modelo é mensurar em cada Plano o custo desse aumento na esperança média de vida.

A análise mais detalhada dos modelos aplicados nas responsabilidades dos participantes activos efectuar-se-á sob o VABT e dos pensionistas sob as anuidades.

Fazendo uma análise dos resultados mais aprofundada para o *grupo dos activos*, que se realizará sob a base do VABT, observa-se na figura apresentada de seguida a comparação entre o modelo discreto, com decremento de morte e invalidez com o modelo contínuo.

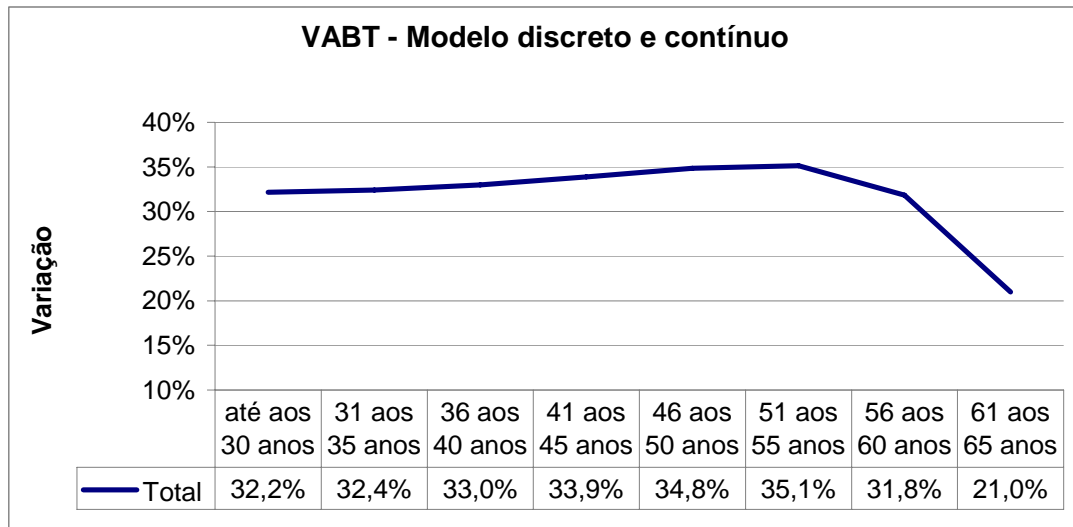


Figura 28 – Valor actual dos benefícios totais entre modelo discreto e contínuo.

Como se pode verificar o modelo contínuo torna as responsabilidades dos activos maiores, cerca de 33% relativamente ao modelo discreto líquido, com decremento de morte e invalidez. Este facto deve-se ao ajustamento efectuado na tábua de mortalidade e de invalidez. Como se visualiza no gráfico existe uma curva mais acentuada a partir dos 52 anos, pois é daqui até aos 65 anos a tábua de invalidez tem maior impacto que a mortalidade.

Dada a população em causa possuir menos participantes a partir dos 50 anos, os valores encontram-se mais dispersos, mantendo contudo a diminuição de responsabilidades à medida que a idade aumenta.

Como é de esperar o custo normal terá a mesma variação que o VABT do modelo discreto para o contínuo devido a ser a proporção do VABT sob o TST.

Tendo como ponto de análise o modelo contínuo com esperança média de vida (MCEMV), a variação relativamente ao modelo discreto é maior que com o modelo contínuo, cerca de 50%. Esta variação deve-se essencialmente a ter em consideração não só o aumento da esperança média de vida do participante mas também o ajustamento efectuado para transformar o modelo discreto em contínuo, que como se observa nas tabelas 9 a 11 tem um impacto muito grande.

À semelhança da comparação efectuada anteriormente, a curva é mais acentuada a partir dos 52 anos, devido à tabela de invalidez ter maior impacto que a de mortalidade.

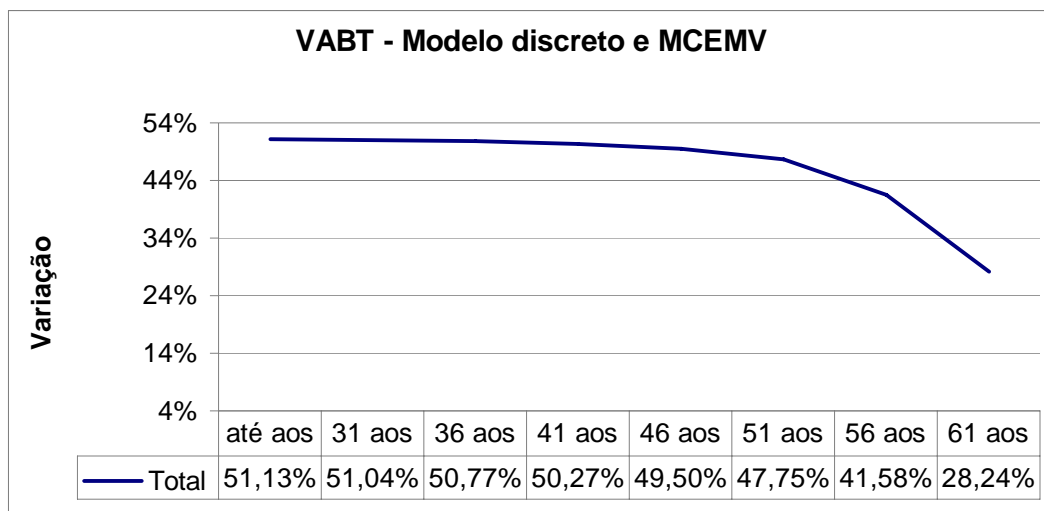


Figura 29 – Valor actual dos benefícios totais entre o modelo discreto e o MCEMV.

Comparando-se o modelo contínuo e o modelo contínuo com uma Esperança Média de Vida, observa-se que as responsabilidades dos activos aumentaram relativamente ao modelo contínuo sem a aplicação de MCEMV. Este facto era expectável devido à probabilidade de vida ajustada ao aumento da esperança média de vida, maior com a MCEMV, que varia consoante a idade do participante, ter aumentando a probabilidade de vida do participante, consequentemente as responsabilidades.

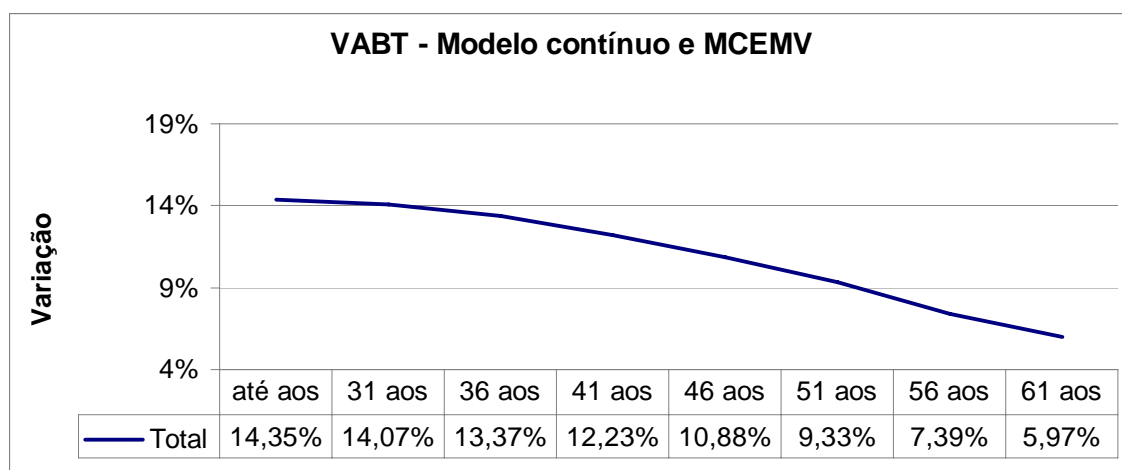


Figura 30 – Valor actual dos benefícios totais entre o modelo contínuo e o MCEMV.

Na figura 31 observa-se que a variação do VABT entre o modelo discreto e contínuo tem um aumento considerável na ordem dos 35% começando a baixar aos 52 anos. Na comparação do modelo discreto com o MCEMV visualiza-se uma variação nos 51%, havendo somente uma variação maior relativamente ao modelo discreto e ao contínuo (linha azul), no intervalo 52 aos 60 anos, quando a invalidez começa a ter maior impacto. E entre o modelo contínuo e MCEMV existe um acréscimo de responsabilidades de 14% começando a diminuir a partir dos 52 anos de idade devido ao impacto da invalidez.

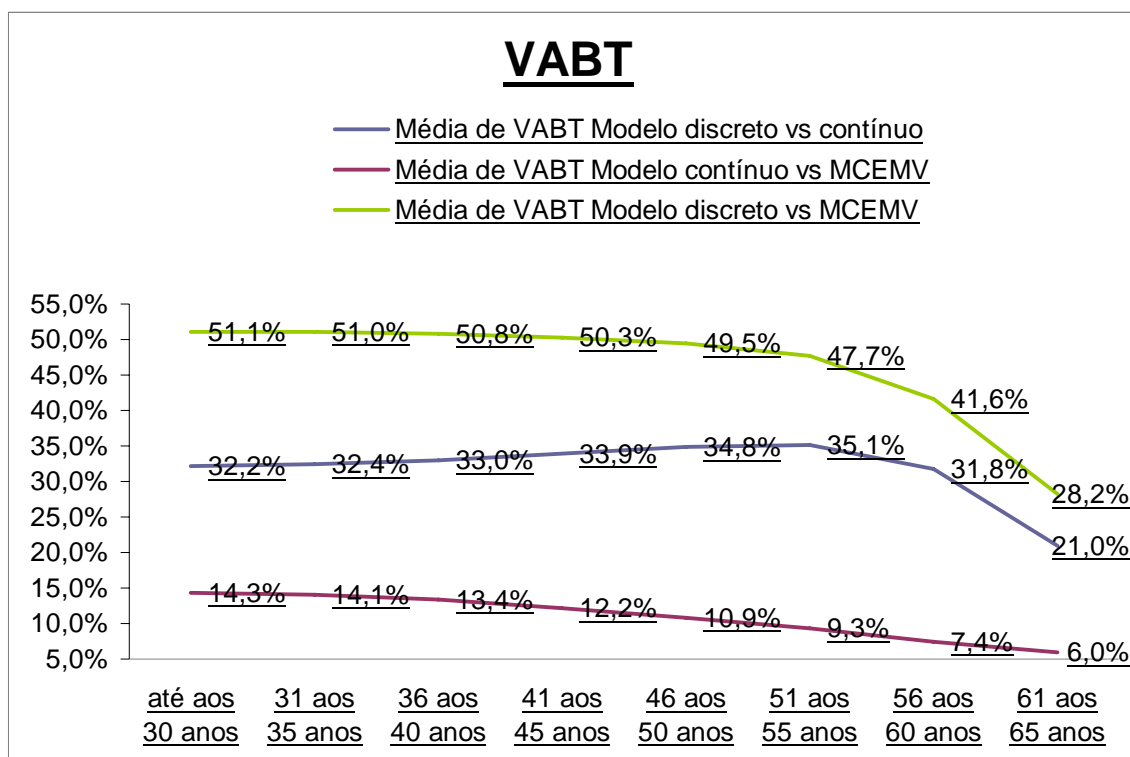


Figura 31 – Média de VABT entre os vários modelos.

A análise mais detalhada dos resultados do grupo dos inactivos (pensionistas), mais detalhada realizar-se-á sob a base das anuidades. Como se pode visualizar na figura abaixo, a variação do modelo discreto com o modelo contínuo (com decremento de morte, dado que os inactivos já não possuem o decremento de invalidez) aumenta consideravelmente, cerca de 5%, devido ao ajustamento efectuado.

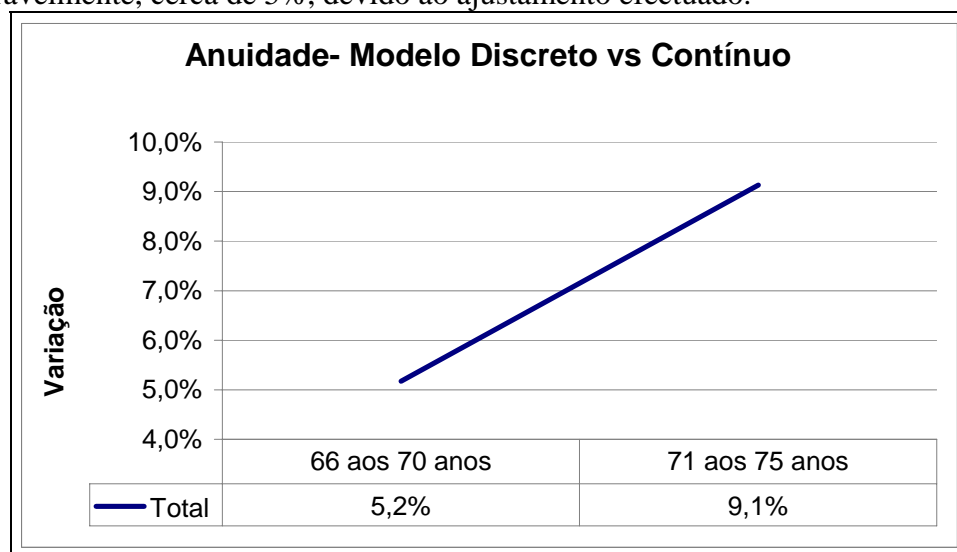


Figura 32-Comparação da anuidade dos pensionistas do modelo discreto e contínuo.

Como se pode ver existe um aumento nas anuidades à medida que a idade aumenta, devido à passagem de modelo discreto para modelo contínuo.

Comparando-se o modelo discreto e o MCEMV observa-se que a anuidade aumenta cerca de 11%, devendo-se essencialmente ao factor de esperança média de vida. Ou seja, à medida que o beneficiário tem mais idade existe uma esperança média de vida menor, causando uma maior anuidade.

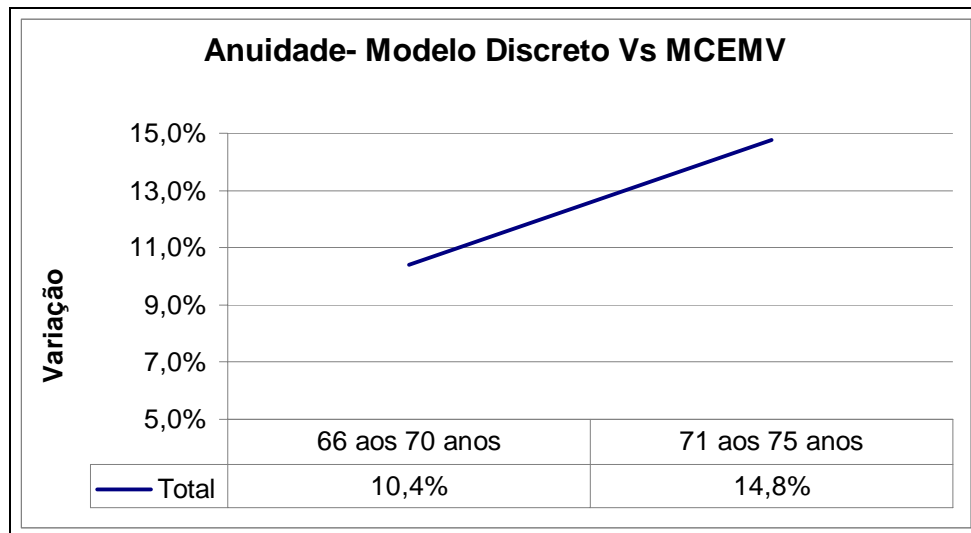


Figura 33 – Comparação da anuidade dos pensionistas do modelo discreto e MCEMV.

Da comparação entre as anuidades do modelo contínuo com e sem acréscimo de esperança média de vida (MCEMV), verifica-se que o acréscimo é de cerca de 5%.

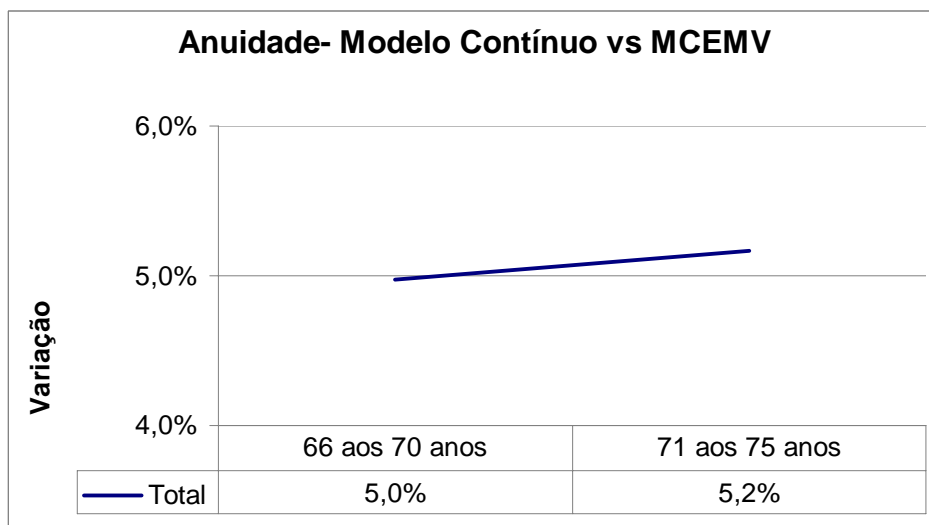


Figura 34 – Comparação de anuidade entre modelo contínuo e MCEMV.

Num breve resumo, como seria de esperar as variações das anuidades são maiores do modelo discreto para o MCEMV, relativamente ao modelo contínuo com o decremento

morte e invalidez, (linha verde e azul, respectivamente). Comparando-se o MCEMV verifica-se que a variação é menor relativamente à variação entre o discreto e o MCEMV. Em média o impacto do aumento da MCEMV é cerca de 5%.

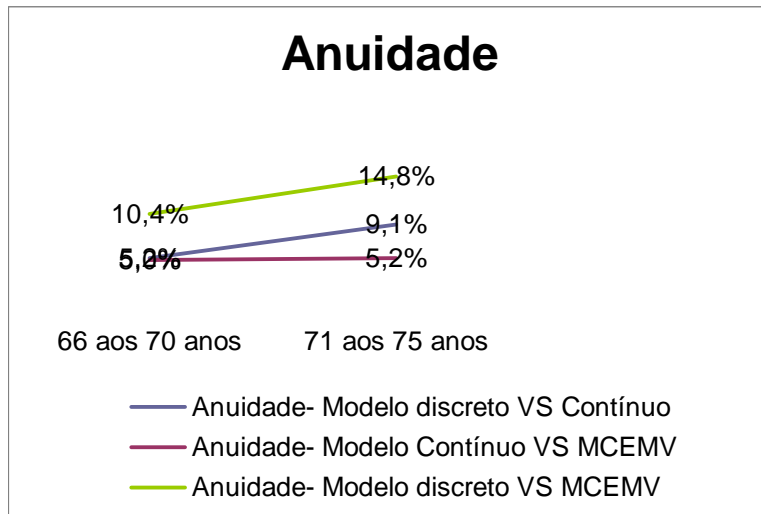


Figura 35 – Comparação de variações de anuidades entre os vários modelos.

No capítulo que se apresenta de seguida apresenta-se a conclusão da aplicação de MCEMV relativamente à avaliação da população em análise.

7. Comentários finais

Com o decorrer dos tempos, devido a uma melhoria de condições de níveis de vida, o desenvolvimento da medicina e de outros factores, o ser humano tem tido uma maior longevidade que resulta numa esperança média de vida com tendência para vir a aumentar.

Neste sentido os Fundos de Pensões adquirem uma importância acrescida para soluções financeiras, havendo necessidade de adaptar os pressupostos actuariais nos riscos de mortalidade e longevidade actuais.

Tendo presente a adaptabilidade dos pressupostos actuariais, a opção foi estudar o impacto da aplicação de um modelo contínuo em decrementos de mortalidade e invalidez, com o aumento da esperança média de vida por forma a simular o aumento de longevidade do ser humano numa avaliação a uma população fictícia, em substituição do modelo tradicional discreto.

Observando-se os resultados obtidos no modelo contínuo, com o aumento da esperança média de vida para cerca de mais 2 anos do que a actual aos 65 anos de idade, visualizou-se que as responsabilidades dos indivíduos são mais elevadas do que com o uso do modelo discreto com decremento de morte e invalidez, como seria de esperar. Assim sendo, em modelos cuja longevidade tem tendência a aumentar, deve-se adoptar pressupostos actuariais que tenham em consideração a população em análise, obtendo-se assim valores mais reais em vez de estimativas pouco actuais, pelo que a utilização de tábuas dinâmicas deverá ser mais frequente.

Neste sentido optou-se por fazer um estudo com uma população fictícia, de modo a comparar o resultado das responsabilidades utilizando três modelos apenas com decrementos de morte e invalidez. O tradicional modelo discreto, o modelo contínuo (pelo modelo de Gompertz) e o modelo contínuo modificado para incorporar o aumento esperança média de vida.

Pode verificar-se que para os activos, o Valor Actual dos Benefícios Totais aumenta significativamente com o uso do modelo contínuo em vez do modelo discreto, havendo uma maior discrepância a partir dos 50 até aos 64 anos devido à invalidez ter maior impacto nesse intervalo. Tal facto deve-se essencialmente à parametrização de Gompertz, efectuada para se poder usar o modelo contínuo.

Fazendo uma comparação mais homogénea, ou seja, entre dois modelos contínuos mas considerando um com projecção de esperança média de vida e outro sem, observou-se igualmente que a responsabilidade aumenta para qualquer um dos grupos analisados (activos ou beneficiários), quando se usa a esperança média de vida. Tal facto era

previsível, pois a probabilidade de vida é maior aumentando consequentemente as responsabilidades.

À semelhança dos activos, para os beneficiários as anuidades do modelo discreto são inferiores ao do modelo contínuo com decremento mortalidade (a partir dos 65 anos (INR) deixa de fazer sentido usar o decremento de invalidez). Também aqui se deve essencialmente à parametrização de Gompertz, efectuada para se puder usar o modelo contínuo.

Na comparação do modelo contínuo com o contínuo com esperança média de vida, verifica-se igualmente um crescimento de anuidades, sendo contudo este crescimento mais suave (5%) que comparando-se o modelo contínuo com o discreto, devendo-se este crescimento unicamente ao ajustamento efectuado pelo aumento de esperança média de vida.

O objectivo deste trabalho foi atingido, desenvolveu-se um modelo em tempo contínuo que incorpora a possibilidade da esperança média de vida aumentar no decorrer do tempo. É possível realizar-se uma avaliação actuarial de responsabilidades de um Fundo de Pensões de uma forma mais rápida, computacionalmente falando, do que em tempo discreto. Esse incremento, em velocidade de cálculo, seria mais notório caso de avaliasse também o benefício de invalidez (o que não aconteceu neste trabalho), pois nesse caso a determinação pelo método *Unit Credit Projected* leva ao cálculo de TSF probabilidades de sobrevivência para cada participante activo. Foi possível, também, incorporar a tabela de multidecremento no modelo.

Existe, no entanto, um aspecto que merece maior atenção, mas não no âmbito do presente trabalho. O impacto de ajustar a lei de Gompertz à tabela líquida é muito elevado. Traduz-se num aumento significativo de responsabilidades que não deveria existir. É possível que outro modelo de mortalidade sirva melhor esse propósito.

8. Bibliografia

Afonso, L (2008/09). Apontamentos da Disciplina Segurança Social e Fundos de Pensões. Mestrado em Matemática Aplicada em Actuariado, Estatística e Investigação Operacional. Faculdade de Ciências e Tecnologia – UNL.

Bowers, Gerber, Hickman, Jones, & Nesbitt. (1986). *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries.

Bureau, U. C. (2002-2007). www.census.gov/ipc/www/idb/country/poportal.html. Retrieved Janeiro 30, 2009, from United States Census Bureau: <http://www.census.gov/>

Carvalho, P. S. (1993). *Planos e Fundos de Pensões*. Textos de Gestão da Texto Editora. Diário da República. (20 de Janeiro de 2006). Decreto-Lei nº 12/2006. I Série A .

Haberman, S., & Renshaw, A. (1996). Generalized linear models and actuarial science. *The Statistician* , 45 (4), pp. 407-436.

INE. (2008). *Instituto Nacional de Estatística*. Retrieved janeiro 2009, from Instituto Nacional de estatística:
http://www.ine.pt/xportal/xmain?xpid=INE&xpgid=ine_publicacoes&PUBLICACOESpub_boui=48431927&PUBLICACOESmodo=2

ISP. (2007). Estatísticas de Fundos de Pensões. ISP.

ISP. (13 de Novembro de 1991). Norma Regulamentar Nr 298/1991. ISP.

ISP. (05 de Dezembro de 1996). Norma Regulamentar Nr. 21/1996. ISP.

Neill, A. (1992). *Life Contingencies*. The Institute of Actuaries and the Faculty of Actuaries in Scotland.

Norma Internacional de Contabilidade IAS19. (Actualizada em 2002). *Benefícios dos Empregados* .

Renshaw, A., & Haberman, S. (2000). Modelling for mortality reduction factors. *Actuarial Research Paper*, 127.

Segurança Social. (Maio 2006). *Relatório técnico sobre a sustentabilidade da Segurança Social*. Segurança Social.

Winklevoss. (1993). *Pension mathematics with numerical illustrations*. University of Pennsylvania Press.

<http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page/portal/statistics/themes>

http://ec.europa.eu/services/index_en.htm

9. Tabela de acrónimos

INR	Idade Normal de Reforma
BD	Benefício Definido
CD	Contribuição Definida
CN	Custo Normal
FN	Fundo Normal
VAB	Valor Actual dos Benefícios por Participante
VABT	Valor Actual dos Benefícios Totais
VAPP	Valor Actual das Pensões em Pagamento
VARSP	Valor Actual das Responsabilidades por Serviços Passados
VASF	Valor Actual dos Salários Futuros
MS	Massa Salarial
INE	Instituto Nacional Estatística
SS	Segurança Social
UCP	<i>Unit Credit Projected</i>
TSP	Tempo de Serviço Passado
TSF	Tempo de Serviço Futuro
TST	Tempo de Serviço Total
PPR/E	Plano Poupança Reforma
PPA	Plano Poupança Aplicação
PME	Pequenas e médias empresas
MCEMV	Modelo contínuo com Esperança Média de Vida

10. Anexo

Tabela de mortalidade TV73/77 e de invalidez EVK80

Idade	TV73_77	EKV80
0	100.000,00	100.000,00
1	98.832,00	100.000,00
2	98.736,00	100.000,00
3	98.677,00	100.000,00
4	98.631,00	100.000,00
5	98.593,00	100.000,00
6	98.559,00	100.000,00
7	98.528,00	100.000,00
8	98.499,00	100.000,00
9	98.472,00	100.000,00
10	98.447,00	100.000,00
11	98.424,00	100.000,00
12	98.401,00	100.000,00
13	98.379,00	100.000,00
14	98.354,00	100.000,00
15	98.324,00	100.000,00
16	98.286,00	100.000,00
17	98.239,00	100.000,00
18	98.182,00	100.000,00
19	98.119,00	100.000,00
20	98.055,00	100.000,00
21	97.993,00	99.990,00
22	97.932,00	99.980,00
23	97.873,00	99.970,00
24	97.815,00	99.960,01
25	97.755,00	99.950,01
26	97.696,00	99.940,01

Idade	TV73_77	EKV80
27	97.636,00	99.930,02
28	97.575,00	99.920,03
29	97.509,00	99.910,04
30	97.439,00	99.900,04
31	97.367,00	99.890,05
32	97.290,00	99.878,07
33	97.208,00	99.864,09
34	97.120,00	99.848,11
35	97.025,00	99.830,13
36	96.922,00	99.810,17
37	96.812,00	99.788,21
38	96.691,00	99.764,26
39	96.561,00	99.738,32
40	96.419,00	99.710,40
41	96.263,00	99.680,48
42	96.094,00	99.640,61
43	95.910,00	99.590,79
44	95.707,00	99.531,04
45	95.485,00	99.461,36
46	95.245,00	99.381,79
47	94.983,00	99.282,41
48	94.698,00	99.153,35
49	94.388,00	98.984,78
50	94.056,00	98.767,02
51	93.702,00	98.490,47
52	93.322,00	98.134,92
53	92.910,00	97.682,52

Idade	TV73_77	EKV80
54	92.464,99	97.114,98
55	91.987,00	96.413,81
56	91.478,00	95.563,44
57	90.938,00	94.490,27
58	90.364,00	93.087,08
59	89.754,00	91.256,06
60	89.106,00	88.911,69
61	88.417,00	85.983,83
62	87.674,00	82.529,86
63	86.862,00	78.617,12
64	85.977,00	74.319,91
65	85.015,00	69.718,02
66	83.966,00	
67	82.818,00	
68	81.561,00	
69	80.181,00	
70	78.659,00	
71	76.982,00	
72	75.139,00	
73	73.120,00	
74	70.914,00	
75	68.502,00	
76	65.860,00	
77	62.981,00	
78	59.867,00	
79	56.524,00	
80	52.974,00	
81	49.246,00	

Idade	TV73_77	EKV80
82	45.363,00	
83	41.351,00	
84	37.256,00	
85	33.160,00	
86	29.136,00	
87	25.229,00	
88	21.491,00	
89	17.979,00	
90	14.743,00	
91	11.852,00	
92	9.362,00	
93	7.280,00	
94	5.571,00	
95	4.190,00	
96	3.092,00	
97	2.238,00	
98	1.585,00	
99	1.098,00	
100	531,00	
101	237,00	
102	97,00	
103	36,00	
104	12,00	
105	4,00	
106	1,00	
107	1,00	
108	1,00	